维普资讯 http://www.cqvip.com

(11)

对纤维复合材料弹性常数研究的评论

185-192

周祝林
(上海玻璃钢研究所 200126)

TQ342.94

摘 要

A 对 40 多年的单向和正交双向纤维复合材料弹性常数的研究成果进行评论. 较详细地介绍了纤维复合材料弹性常数的计算公式, 对各计算公式进行分析、并与其他类似的计算公式进行了比较. 最后给出一些简化的计算公式, 可用于复合材料产品的设计和优化设计.

关键词 纤维复合材料, 弹性常数、评论, 设计 优化设计

1 引言

自从纤维复合材料问世以来, 人们对其弹性常数细观力学的理论估算极为重视, 由于问题的复杂和困难性, 虽经前人数十年的研究, 但还未很好解决 [1]. 纤维复合材料的最大特点是性能的可设计性. 这包括两方面: 一是性能随组分材料性能和组分比而变化; 二是性能随纤维方向和铺层次序而变化. 纤维复合材料弹性常数细观力学是研究性能随组分材料性能和组分比的变化规律, 文献 [2~9] 主要研究单向纤维复合材料的弹性常数. 这种材料的弹性常数有五个. 若以 L 表示纵向, T 表示横向, W 表示厚度方向, 则五个弹性常数为 E_L, E_T, G_{LT}, ν_{LT} 和 G_{TW} 或 ν_{TW}. 因为单向纤维复合材料可假设为宏观同性材料, 所以 G_{TW} 与 ν_{TW} 符合 $G_{TW}=E_T/2(1+\nu_{TW})$. 根据细观分析, 纤维排列不完全是规整均匀的, 因此, E_T 与 E_W, ν_{TW} 与 ν_{WT} 不完全相同. 从实用角度出发, 单向纤维复合材料是薄层状, 是构成复合材料的单元, 因此 G_{TW} 或 ν_{TW} 不重要. 这样主要的是其余四个弹性常数. 实际使用的复合材料往往是正交双向或多向的, 在复合材料产品设计中, 弹性常数可按层板理论得出, 但有时计算较复杂. 若弹性常数有简单的理论估算公式, 就可简化复合材料产品设计, 特别是简化优化设计的程序.

2 单向纤维复合材料的弹性常数

2.1 纵向弹性常数

文献 [2~9] 介绍了五个计算 E_L 的理论公式:

a. 一般混合律公式

$$E_L = E_{f1}V_f + E_mV_m \tag{1}$$

b. 蔡为仑的修正混合律公式

$$E_L = k(E_{f1}V_f + E_mV_m) \tag{2}$$

式中 k 为修正系数, 由实验确定, 一般为 0.9~1.1. 为安全起见, k 取 0.9~1.0.

c. 鲍尔用极值法得到的理论计算公式

$$\begin{aligned} E_L = & (1-\nu_f-4\nu_f\nu_{LT}+2\nu_{LT}^2)E_fV_f(1-\nu_f-2\nu_f^2)^{-1} \\ & +(1-\nu_m-4\nu_m\nu_{LT}+2\nu_{LT}^2)(1-\nu_m-2\nu_m)^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

本题得到国家建材局科学技术基金资助. 课题人员蒋汉生、陆巽贤、陆君珞、钟天麟、杨云娣.
收稿日期: 1995-01-20

维普资讯 http://www.cqvip.com

d. 惠特尼－瑞莱同心圆柱模型的公式

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m + 4(\nu_{f12} - \nu_m)^2 V_f V_m k_{f2} k_m G_m$$
$$\cdot[(V_f k_{f2} + V_m k_m)G_m + _{f2} k_m]^{-1} \tag{4}$$

式中 $k_{f2} = E_{f2}[2(1-\nu_{f23} - 2\nu_{f12}E_{f2}/E_{f1}]^{-1}$;　$k_m = E_m[2(1-\nu_m - 2\nu_m^2)]^{-1}$. 下标 1 表示纤维轴向；2, 3 表示纤维径向； f 表示纤维； m 表示基体.

e. 既包含纤维不连续的实际情况，又能适用于特殊使用环境的理论计算公式 [8]

$$E_L = E_{f1} V_f (1 - k_f) + \varphi k_f V_f E_{f1} + E_m V_m \tag{5}$$

式 (4) 与式 (1) 相比，误差不到 0.1%, 可见式 (1) 已很精确. 式 (3) 因 ν_{LT} 未知，应用极不方便. 另由 ν_{LT} 的误差会引起 E_L 的误差，无实用价值，并且用 ν_{LT} 的可能达到的值计算，与式 (1) 相比较，最大误差不到 10%, 这误差包括在式 (2) 的 k 系数范围内. 从实用出发，式 (2) 较式 (1) 更具有适用性. 但不论从复合材料性能研究，还是从产品设计出发，式 (5) 更合适，更科学. 这公式的适用范围很广，可适用于常温、高低温、蠕变、化学腐蚀、以及各种环境下老化的拉伸弹性模量的计算.

文献 [10] 对单向纤维增强复合材料的基体微裂纹及其影响进行研究. 就基体裂纹极密 (裂纹间距 $a \to 0$) 的极限情况 (即基体不起作用，仅留下纤维起作用) 而言，若按式 (1) 以 V_f 为 0.5 时计算，相差不到 5%(对于 GFRP), 或不到 1%(对于 BFRP). 由此可见，计及基体的裂纹远没有计及纤维的不连续、不均匀、不平行来得重要. 所以式 (5) 既像式 (1) 在常温常态一样很精确，又很符合纤维复合材料的实际情况，适合于高低温及其他状态下的估算，是较科学的较全面的理论计算公式.

2.2 纵横泊松比

ν_{LT} 与 E_L 类似，只要在式 (1), (2) 中用 ν_{f12} 代替 E_{f1}, ν_m 代替 E_m 即可. 鲍尔极值法的泊松比计算公式为

$$\nu_{LT} = [\nu_{f12}(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)E_{f1}V_f + V_m(1 - \nu_{f12} - 2\nu_{f12})E_m V_m]$$
$$\cdot[(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)E_f V_f + (1 - \nu_{f12} - 2\nu_{f12}^2)E_m V_m]^{-1} \tag{6}$$

惠特尼－瑞莱同心圆柱模型弹性力学法的计算公式为

$$\nu_{LT} = [\nu_m + (\nu_{f12} - \nu_m)V_f k_{f2}(k_m + G_m)]$$
$$\cdot[(V_f k_{f2} + V_m k_m)G_m + k_{f2}k_m)]^{-1} \tag{7}$$

文献 [8] 介绍的公式为：

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f (1 - k) + \beta k V_f + \nu_m V_m (1 - k) \tag{8}$$

式中 k 为纤维与基体未粘接或受力过程脱胶的面积占纤维表面积的百分比，β 是与受力状况、脱胶区域状态等有关的常数.

估算泊松比的典型公式共有七个，式 (6) 和 (7) 等都是计及纤维与基体的变形一致，比式 (1) 、(2) 的更精确，但误差都不大. 式 (7) 的误差 <3%, 式 (6) 的误差相当于式 (2) 的 k 修正系数，因此意义都不大. 唯有式 (8) 能说明单向纤维复合材料在受力过程中纵横泊松比的本质. 由于复合材料中纤维不完全与基体粘接，存有不少空隙及界面脱胶，因此在沿纤维方向受拉或受压时，其横向形变不一样，结果拉压的泊松比不一样. 特别是在受力过程中泊松比不是常数，基体要开裂，界面要脱胶. 对于用不同纤维增强的复合材料，由于纤维直径、纤维束状态、纤维表面处理及成型工艺等的不同，界面状态和在受力过程中的纵横变形均不同，尤其对于硼纤维和碳纤维复合材料会引起泊松比随受力增大有较大的变化. 主要现象是 ν_{LT} 随纵向受拉增大而减小，ν_{LT} 随纵向受压增大而增大，特别是当纵向压应变较大 (如 >1%) 时，ν_{LT} 接近或超过 0.5. 对于交变载荷，若测试泊松比，则会出现类似情况. 这与阻尼增大是一致的，说明随着交变次数的增多，界面脱胶更严重. 这种现象对于碳纤维复合材料更为突出.

维普资讯 http://www.cqvip.com

这是因为树脂基体不易渗透到纤维束内，结果碳纤维束中有较多孔隙和纵向裂纹．玻璃纤维比较容易渗透树脂基体．在常温下，纵向拉伸时的泊松比比较符合 k=0 时的一般混合律公式 [8]．因此式 (8) 是较精确又较全面的．

2.3 横向弹性模量

横向弹性模量约为纵向的 1/30~1/5，特别是对于高模量纤维复合材料，在层板理论计算中，横向模量远没有纵向模量重要．由于理论上分析横向弹性模量较为复杂，各国学者对此研究特别多，计算模型五花八门，估算公式有几十个．计算方法有四种：材料力学法、弹性力学法、半经验法和有限元法．材料力学法有串联模型 (有三种估算公式)；回字模型 (有上下限，有两种估算公式)[5]；外方内圆模型 (有上下限，若外方采用矩形，计算公式更全面．更符合实验值)[8]．弹性力学法多数采用同心圆柱模型，用不同假设有不同的计算公式．除文献 [6] 的两个公式外，还有更具有代表性、较多被文献引用的公式，如蔡为仑公式 [2] 及下列公式

$$E_{\mathrm{T}} = 2k_2(1-\nu_{\mathrm{TW}})\cdot[1+4k_2\nu_{\mathrm{LT}}^2/E_{\mathrm{L}})^{-1} \tag{9a}$$

$$k_2 = [k_{\mathrm{m}}(k_{\mathrm{f2}}+G_{\mathrm{m}})+G_{\mathrm{m}}(k_{\mathrm{f2}}-k_{\mathrm{m}})V_{\mathrm{f}}]\cdot[(k_{\mathrm{f2}}+G_{\mathrm{m}})-(k_{\mathrm{f2}}-k_{\mathrm{m}})V_{\mathrm{f}}]^{-1} \tag{9b}$$

半经验公式除文献 [6] 的式 (7) 、 (8) 、 (9) 外，还有张汝光的简化公式 [11]

$$E_{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{m}}(1+V_{\mathrm{f}})\cdot(1-V_{\mathrm{f}})^{-1} \tag{10}$$

作者经计算分析后认为，串联模型显然不合适．弹性力学法没有回字模型的计算公式更合适．材料力学法中的外方内圆模型的计算公式比回字型模型更合适．对于被一般文献认为与实验值很符合的式 (9)，经计算表明，计算结果与式 (11) 的较一致．当 $V_f \le 0.5$ 时，式 (9) 大于式 (11)，也大于实验值．总的来讲，式 (11) 比式 (9) 更符合实验值，除 $V_f > 0.7$ 外．具体计算结果与实验值比较列于表 1．为便于比较，外方内圆模型的计算公式列于下面 (外方采用矩形模型)

$$E_{\mathrm{T}} = (E'_{\mathrm{T}}+E''_{\mathrm{T}})/2 \tag{11}$$

$$E'_{\mathrm{T}} = \{\frac{b-r}{b} - \frac{\pi E_{\mathrm{f2}}}{2(E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}})b} + (\frac{E_{\mathrm{f2}}a}{E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}}})^2\frac{2(E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}})}{b[(aE_{\mathrm{f2}})^2-r^2(E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}})^2]^{1/2}}\cdot\mathrm{tg}^{-1}[\frac{aE_{\mathrm{f2}}+(E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}})r}{aE_{\mathrm{f2}}-(E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}})r}]^{1/2}\}E_{\mathrm{m}} \tag{11a}$$

$$E''_{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{m}}\{\frac{a-r}{a} + \frac{E_{\mathrm{m}}}{(E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}})a}\{\frac{\pi b}{2} - \frac{b^2E_{\mathrm{m}}}{[(E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}})^2r^2-b^2E_{\mathrm{m}}^2]^{1/2}}\cdot\ln[\frac{(E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}})r+[(E_{\mathrm{f2}}-E_{\mathrm{m}})^2r^2-b^2E_m^2)^{1/2}}{bE_m}]\}\}^{-1} \tag{11b}$$

上述一些计算公式经整理简化后得出下列形式

朱颐龄回字模型的计算公式，即等应力法 (下限) 为

$$E'_{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{m}}[1+V_{\mathrm{f}}^{1.5}(1-E_{\mathrm{m}}\cdot E_{\mathrm{f2}}^{-1})^2]\cdot[1-V_{\mathrm{f}}(1-E_mE_{\mathrm{f2}}^{-1})]^{-1} \approx E_{\mathrm{m}}(1+V_{\mathrm{f}}^{1.5})(1-V_{\mathrm{f}})^{-1} \tag{12}$$

等应变法 (上限) 为

$$E''_{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{m}}(1-V_{\mathrm{f}}^{0.5})^{-1} = E_{\mathrm{m}}(1+V_{\mathrm{f}}^{0.5})(1-V_{\mathrm{f}})^{-1} \tag{13}$$

蔡为仑经验公式 (当 η=0.5 时)[4]：

$$E_{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{m}}\frac{E_{\mathrm{f2}}/E_{\mathrm{m}}[V_{\mathrm{f}}+\eta(1-v_{\mathrm{f}})]}{V_{\mathrm{f}}+\eta E_{\mathrm{f2}}/E_{\mathrm{m}}(1-V_{\mathrm{f}})} \approx E_{\mathrm{m}}\frac{\eta+(1-\eta)V_{\mathrm{f}}}{\eta(1-V_{\mathrm{f}})} = E_{\mathrm{m}}\frac{1+V_{\mathrm{f}}}{1-V_{\mathrm{f}}} \tag{14}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

哈尔平 - 蔡半经验公式 [2]

$$E_T = E_m[E_{f2}/E_m + \xi + \xi(E_{f2}/E_m - 1)V_f] \cdot [E_{f2}/E_m + \xi(E_{f2}/E_m - 1)V_f]^{-1} \tag{15}$$

若略去 E_m/E_{f2} 项，且 ξ=2, 则

$$E_T = E_m(1 + 2V_f)(1 - V_f)^{-1} \tag{16}$$

表 1 式 (9), (11) 计算值与实验值比较(GPa)

V_f(%)		10	20	30	40	50	60	70	75	80
式 (9)	GFRP	5.443	6.747	8.154	9.873	12.11	15.20	19.81	23.06	27.35
	BFRP	6.347	7.754	9.455	11.68	14.77	19.32	26.71	31.83	40.10
式 (11)	GFRP	4.500	5.497	6.770	8.509	11.07	15.29	23.74	32.43	
	BFRP	4.667	5.801	7.298	9.444	12.84	19.22	36.33	65.56	
实验值	GFRP		5.87	7.25	8.81	11.48	14.59	20.80		
相对	式 (9)		-14.9	-12.5	-12.1	-5.5	-4.2	4.8		
误差 (%)	式 (11)		6.3	6.6	3.4	3.6	4.8	-14.1		

表 2 式(10), (11), (15), (16)的计算值比较 (GPa)

V_f(%)		10	20	30	40	50	60	70	80
式 (11)	GFRP	4.405	5.357	6.555	8.168	10.49	14.18	21.08	(39.67)
	BFRP	4.667	5.801	7.298	9.444	12.84	19.22	36.33	(132.3)
式 (10)		4.228	5.250	6.500	8.166	10.50	14.00	19.83	31.50
式 (15)	GFRP	4.492	5.692	7.171	9.041	11.48	14.78	19.55	26.97
	BFRP	4.663	6.040	7.835	10.20	13.47	18.27	26.01	40.56
式 (16)		4.666	6.125	8.000	10.50	14.00	19.25	28.00	45.50

注：括号内数值仅供参考，因为 V_f=80% 已超出式 (11) 的适用范围、下同.

可见，式 (14) 与式 (10) 完全一样、朱颐龄的回字模型上下限有与张氏简化公式类似的形式，它们的中间值接近张氏的计算结果. 经计算表明，朱颐龄的外方内圆模型的中值更与张氏简化公式计算值一致. 哈尔平 - 蔡半经验公式也有与张氏简化公式相似的形式. 按式 (10)、(11), (15), (16) 的计算结果列于表 2. 由此可见，式 (15) 比式 (10), (11) 更一致，式 (15) 适用性更广、对于玻纤复合材料，式 (10) 的精度已足够高. 对于硼纤复合材料，式 (16) 与式 (15) 的计算值很一致，比式 (10) 略大，但误差很小、由于横向弹性模量远比纵向的小，若以较大比例 1/5 为例，当横向弹性模量的误差以 20% 计算时，正交双向复合材料弹性模量的误差为 3.3%; 若以 1/20 为例，误差在 1% 以内. 由此可见，一般情况下，用式 (10) 来估算单向纤维复合材料的横向弹性模量是可行的，可靠的、这样在计算层合板弹性常数就非常简单，而造成的误差极小.

2.4 纵横剪切模量

纵横剪切模量的理论计算公式与横向弹性模量一样，较复杂，有十几个典型的计算公式，在此不赘述. 对于外方内圆模型，只要用 G_{f12}, G_m 分别代替式 (11) 中的 E_{f2}, E_m 即可. 在此要着重叙述一下的是，用同心圆柱模型的弹性力学解得的公式

$$G_{LT} = G_m[G_m(1 - V_f) + G_{f12}(1 + V_f) \cdot [G_m(1 + V_f) + G_{f12}(1 - V_f)]^{-1} \tag{17}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

经简化，并略去 G_m/G_{f12} 项后即得

$$G_{LT}=G_m(1+V_f)(1-V_f)^{-1} \tag{18}$$

即为张汝光的简化公式．可见，简化式也是有一定的理论根据．一般认为式 (17) 计算值比实验值小，而式 (18) 比式 (17) 略大，较接近实验值．用 G_{f12}, G_m 代替式 (15) 中 E_{f2}、E_m 后，同样可以得出 G_{LT} 的计算式，一般文献认为 ξ=1、而我们计算证明 ξ=1.8 较合适，有时 ξ 要取 2~2.6 才符合实验值．当 ξ=1 时，经简化即得式 (18)．当 ξ=2 时，经简化即得与式 (16) 一样的公式

$$G_{LT}=G_m(1+2V_f)(1-V_f)^{-1} \tag{19}$$

按式 (11)，(15)，(18)，(19) 的计算结果与实验值比较列于表 3. 从表中可看出，与式 (11) 相比较，式 (15) 取 ξ=1.8 时较一致．式 (18) 也与式 (11) 的 GFRP 较一致．与实验值比较，式 (19) 更符合．剪切模量与纤维束浸透树脂基体的程度有很大关系，对于某些碳纤维复合材料，由于纤维束未渗透树脂，实验值要比表 3 中的小．这时必须按式 (15) 用不同 ξ 值来满足．

表 3　式(11)，(15)，(18)，(19)计算值及实验值比较 (GPa)

V_f(%)		10	20	30	40	50	60	70	80
式 (11)	GFRP	1.165	2.032	2.497	3.131	4.059	5.572	8.543	(17.65)
	BFRP	1.737	2.163	2.724	3.531	4.818	7.249	13.93	(57.06)
式 (18)		1.589	1.950	2.414	3.033	3.900	5.200	7.367	11.70
式 (15)	GFRP	1.652	2.081	2.612	3.289	4.180	5.406	7.199	10.70
ξ=1.8	BFRP	1.708	2.187	2.816	3.647	4.798	6.496	9.253	14.52
式 (19)		1.733	2.275	2.971	3.900	5.200	7.150	10.40	16.90
实测值	GFRP		2.21	2.86	3.45	5.07	6.63	9.10	
	CFRP			3.10	3.56	4.65	5.85	10.80*	

注：式 (11)，(15) 已用 G_{f12}、G_m 代替 E_{f2}，E_m；

* 者为硼纤维复合材料的实测值．

3　正交双向纤维复合材料的弹性常数

纤维复合材料产品多数采用正交双向或多向层合板．层合板的弹性常数可由单向纤维复合材料的弹性常数按层板理论计算，也可用简化公式计算．

3.1　层板理论的计算公式

由单向纤维复合材料的弹性常数计算出模量分量

$$\begin{cases} Q_{11} &= E_L(1-\nu_{LT}\nu_{TL})^{-1} \\ Q_{22} &= E_T(1-\nu_{LT}\nu_{TL})^{-1} \\ Q_{12} &= Q_{21}=\nu_{LT}E_T(1-\nu_{LT}\nu_{TL})^{-1} \\ &= \nu_{TL}E_L(1-\nu_{LT}\nu_{TL})^{-1} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{cases} \tag{20}$$

表 4 玻璃纤维复合材料正交层板的弹性常数 (GPa)

	$V_f(\%)$		10	20	30	33	40	50	60	70	80
1:1	$E_1=E_2$	①	7.307	11.12	15.06	16.28	19.21	23.74	29 00	36.04	(49.94)
		②	7.214	11.03	14.98	16.20	19.12	23.63	28.70	34.91	44.10
		③	7.273	11.13	15.10	16.34	19.28	23.80	28.88	35.12	44.23
	$\nu_{12}=\nu_{21}$	②	0.200	0.154	0.135	0.132	0.127	0.127	0.133	0.147	0.176
		③	0.199	0.153	0.134	0.131	0.126	0.126	0.132	0.146	0.175
16:12	E_1	②	7.633	11.85	16.19	17.52	20.70	25.50	30.80	37.10	(46.03)
		③	7.696	11.95	16.32	17.66	20.85	25.68	30.99	37.28	45.90
	E_2	②	6.794	10.20	13.76	14.88	17.57	21.75	26.60	32.98	42.42
		③	6.850	10.29	13.88	15.00	17.70	21.90	26.76	32.94	42.30
	ν_{12}	②③	0.210	0.165	0.146	0.142	0.137	0.137	0.142	0.156	0.183
	ν_{21}	②③	0.189	0.144	0.125	0.122	0.118	0.117	0.124	0.139	0.169
4:1	E_1	①	9.013	14.53	20.09	21.78	25.74	31.54	37.64	44.44	(53.99)
		②	8.976	14.94	20.06	21.74	25.71	31.50	37.52	44.00	51.66
		③	9.026	14.58	20.18	21.88	25.86	15.66	37.69	44.16	51.75
	E_2	①	5.602	7.708	10.19	10.77	12.68	15.94	20.37	27.64	(45.89)
		②	5.452	7.560	9.890	10.64	12.55	15.75	19.88	25.87	36.54
		③	5.483	7.610	9.953	10.71	12.62	15.83	19.97	25.96	36.60
	ν_{12}	②③	0.263	0.224	0.203	0.199	0.193	0.189	0.191	0.198	0.212
	ν_{21}	②③	0.161	0.117	0.101	0.098	0.095	0.095	0.101	0.117	0.150
7:1	E_1	①	9.439	15.38	21.35	23.15	27.38	33.49	39.80	46.54	(55.01)
		②	9.416	15.36	21.33	23.13	27.36	33.47	39.73	46.27	(53.35)
		③	9.454	15.43	21.43	23.24	27.47	33.19	39.85	46.39	53.62
	E_2	①	5.176	6.855	8.760	9.397	11.04	13.99	18.21	25.54	(44.88)
		②	5.012	6.694	8.619	9.260	10.91	13.78	17.68	23.61	34.65
		③	5.032	6.726	8.659	9.303	10.96	13.83	17.73	23.67	34.69
	ν_{12}	②③	0.287	0.253	0.233	0.229	0.222	0.216	0.215	0.217	0.223
	ν_{21}	②③	0.153	0.111	0.095	0.092	0.089	0.089	0.096	0.111	0.145

然后按下式计算出正交层合板的面内刚度

$$\left\{\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}n_L(n_L+n_T)^{-1}+Q_{22}n_T(n_L+n_L)^{-1} \\ A_{22} &= Q_{22}n_L(n_L+n_T)^{-1}+Q_{11}n_T(n_L+n_T)^{-1} \\ A_{12} &= Q_{12}, \quad A_{66}=Q_{66} \end{aligned}\right. \tag{21}$$

正交层合板的弹性常数为

$$\left\{\begin{aligned} E_1 &= A_{11}-A_{12}^2A_{22}^{-1} \\ E_2 &= A_{22}-A_{12}^2A_{11}^{-1} \\ \nu_{12} &= A_{12}A_{22}^{-1} \\ \nu_{21} &= A_{12}A_{11}^{-1} \\ G_{12} &= A_{66}=G_{LT} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

3.2 简化公式

$$\left\{\begin{aligned} E_1 &= E_Ln_L(n_L+n_T)^{-1}+E_Tn_T(n_L+n_T)^{-1} \\ E_2 &= E_Tn_L(n_L+n_T)^{-1}+E_Ln_T(n_L+n_T)^{-1} \\ \nu_{12} &= \nu_{LT}E_TE_2^{-1} \\ \nu_{21} &= \nu_{LT}E_TE_1^{-1} \\ G_{12} &= G_{LT} \end{aligned}\right. \tag{23}$$

式中 E_L 按式 (1) 或式 (5)，E_T 按式 (10) 或 (11)，ν_{LT} 按式 (8)，G_{LT} 按式 (19) 计算.

表 5 硼纤维复合材料正交层板的弹性常数 (GPa)

	V_f(%)		10	20	30	40	50	60	70	75
1:1	$E_1=E_2$	①	23.91	44.30	64.88	85.77	107.3	130.3	158.7	183.5
		②	23.71	44.03	64.48	85.13	106.2	127.7	150.4	162.7
		③	23.89	44.25	64.73	85.43	106.5	128.1	150.9	163.2
	ν_{12}	②	0.060	0.038	0.031	0.028	0.027	0.029	0.032	0.036
	ν_{21}	②	0.060	0.038	0.031	0.028	0.027	0.029	0.032	0.036
4:1	E_1	①	35.42	67.40	99.42	131.5	163.9	169.9	232.1	253.9
		②	35.38	67.29	99.26	131.3	163.5	195.9	228.8	245.6
		③	35.60	67.59	99.61	131.7	163.9	196.5	229.4	246.3
	E_2	①	12.36	21.30	30.33	39.98	50.64	63.69	85.40	113.0
		②	12.05	20.76	29.69	38.95	48.75	59.48	72.08	79.78
		③	12.13	20.85	29.80	39.08	48.89	59.65	72.28	80.00
	ν_{12}	②③	0.118	0.081	0.067	0.061	0.059	0.061	0.067	0.073
	ν_{21}	②③	0.041	0.025	0.020	0.018	0.018	0.019	0.021	0.024
7:1	E_1	①	38.33	73.17	108.10	143.0	178.1	213.6	250.4	271.5
		②	38.29	73.11	107.9	142.9	177.8	213.0	248.4	266.3
		③	38.49	73.39	108.3	143.2	178.3	213.5	249.0	266.9
	E_2	①	9.477	15.43	21.70	28.53	36.48	47.03	67.06	95.46
		②	9.136	14.94	20.99	27.41	34.41	42.43	52.49	59.05
		③	9.185	15.00	21.06	27.49	34.45	42.53	52.53	59.19
	ν_{12}	②③	0.156	0.112	0.094	0.086	0.084	0.086	0.092	0.098
	ν_{21}	②③	0.038	0.023	0.018	0.017	0.016	0.017	0.020	0.022

对具有代表性的玻纤复合材料和硼纤复合材料的计算结果列于表 4，5 中. 表中“①”代表用式 (5)，(8)，(11) 和 (23) 的计算结果；“②”表示用式 (5)，(8)，(10) 和 (23) 的计算结果；“③”表示用式 (5)，(8)，(10) 和 (22) 的计算结果. 计算时，基体性能取 E_m=3.5GPa，ν_m=0.35；玻璃纤维 $E_{f1}=E_{f2}$ =70GPa，ν_{f12}=0.22；硼纤维 $E_{f1}=E_{f2}$ =400GPa，ν_{f12}=0.20. 纤维比取 1:1，4:1，7:1. 还计算了常用 0.2mm 斜纹布增强的、纤维比为 16:12 的玻纤复合材料. 其中纤维体积含量 33% 者相当于树脂含 50%.

由表 4,5 可见，①，②，③三种计算方法的计算结果很一致，特别是②法与③法，即简化公式 (23) 与层板理论公式的计算结果非常一致. 因此，在复合材料设计中完全可以用来计算横向模量，对层板弹性常数的影响极小.

实际使用的双向或多向纤维复合材料，多数是用织物增强. 对于这种织物增强复合材料，其主向弹性模量应计及纤维波纹度的影响 [12]，其计算公式应修正如下

$$E_1 = k_{fL}E_Ln_L(n_L+n_T)^{-1} + k_{fT}E_Tn_T(n_L+n_T)^{-1}$$

$$E_2 = k_{fT}E_Tn_L(n_L+n_T)^{-1} + k_{fL}E_Ln_T(n_L+n_T)^{-1}$$

式中 k_{fL}、k_{fT} 分别为径向纬向纤维波纹度对弹性性能的影响，在 0.9~1.0 之间，与织物的编织方法、温湿度、受力状态及成型工艺等有关. 与织物编织方法的关系如表 6 所示.

对于正交双向复合材料的剪切模量，当层合板完全用单向纤维薄层正交叠合而成时，理论上 $G_{12}=G_{LT}$. 但实际上，一方面纤维不完全是正交，有一定偏斜度，另一方面增强物多数是织物，经纬纤维不完全正交及不完全平直，因此层合板的剪切模量应有一个修正系数 k_G

$$G_{12} = k_GG_{LT} = k_GG_m(1+2V_f)(1-V_f)^{-1} \tag{25}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

式中 k_G 与织物的编织法、经纬纤维的偏离度、成型工艺(特别是加压工艺)、基体的渗透程度等有关，一般在 0.85~1.10 之间．若采用式(18)，则 k_G=0.90~1.30.

表6 k_{fL}，k_{fT}与织物编织方法的关系

编织方法	平纹	1:1 斜纹	4:1 斜纹	7:1 斜纹	单向布
k_{fL}	0.9~1	0.93~1	0.96~1	0.98~1	1
k_{fT}	0.9~1	0.92~1	0.94~1	0.96~1	1

4 结论

从上述计算分析，可以得出下列结论：

a. 对于单向纤维复合材料的纵向弹性模量，式(5)比式(1)更全面，适用性更广，可以适用于常温、高低温、蠕变、化学腐蚀以及各种环境条件下老化的拉伸弹性模量的计算．

b. 对于单向纤维复合材料的纵横泊松比，式(8)比普通混合律公式更能解释纤维复合材料在受力过程及不同环境条件下泊松比变化的机理，是既可靠又全面的计算公式．

c. 对于单向纤维复合材料的横向弹性模量，式(11)比式(9)更合理，更符合实测值．在进行层合板弹性常数计算时，可采用简化公式(10)，一般误差在1%以内．

d. 对于单向纤维复合材料的纵横剪切模量，其精确解有如同式(11)一样的计算公式，比弹性力学法的式(17)更符合实测值．一般情况下，可采用简化公式(19)．

e. 对于正交纤维复合材料层合板，可以采用简化公式(23)计算经纬向弹性模量、泊松比及剪切模量，与层板理论的计算结果很一致，误差在1%以内．若计及用织物增强的实际情况，采用修正后的式(24)、(25)更可靠，更合理．

f. 本文所介绍的式(5)，(8)，(10)，(19)，(23)以及(24)，(25)可用于复合材料产品设计及优化设计，采用更精确的计算公式已无多大意义．

参 考 文 献

1 王震鸣等．单向复合材料弹性常数微观力学分析的探讨．复合材料学报． 1987; 4:72

2 Jones R M. Mechanics of composite materials. Mcgraw-Hill, 1975

3 朱颐龄．玻璃钢结构设计．北京：中国建筑工业出版社， 1980

4 蔡为仑，赫．汤姆斯著，于德昌等译．复合材料力学导论． 1980

5 王震鸣．复合材料力学和复合材料结构力学，北京：机械工业出版社， 1991

6 王秉权等．单向纤维增强复合材料弹性常数的实验研究．复合材料学报， 1986; 2:82

7 王兴业，唐羽章．复合材料力学性能．长沙：国防科技大学出版社， 1988

8 周祝林．单向纤维复合材料弹性常数研究．玻璃钢．待发表

9 Aboud J. Mechanics of composite materials a unified micromechanical approach. Elsevier Science Publishers B. V., 1991

10 陈浩然等．单向纤维增强复合材料的基体微裂纹及其影响．玻璃钢/复合材料． 1991; 6: 1

11 张汝光．复合材料弹性常数的简便估算方法．玻璃钢． 1982; 3: 4

12 周祝林．纤维增强塑料蠕变机理的初步探讨．玻璃钢/复合材料． 1985; 5: 29