

Pilao Duanlie
Yu Sunshang

疲劳、断裂 与损伤

张安奇 朱成九 陈梦成 编著

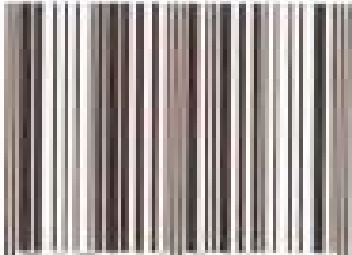


西安交通大学出版社
<http://press.xjtu.edu.cn>

责任编辑：李新波
责任校对：李新波
封面设计：李新波

Pilao Duanlie Yu Sunshang

ISBN 7-81104-188-X



9 787811 041880 >

ISBN 7-81104-188-X/V·008

定价：12.00元

疲劳、断裂与损伤

张安哥 朱成九 陈梦成 编著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

疲劳、断裂与损伤 / 张安哥, 朱成九, 陈梦成编著.
—成都: 西南交通大学出版社, 2006.2
ISBN 7-81104-188-X

I. 疲... II. ①张...②朱...③陈... III. ①疲劳
—分析②断裂力学③损伤 (力学) IV. 0346

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 126651 号

疲劳、断裂与损伤

张安哥 朱成九 陈梦成 编著

责任编辑 孟苏成

责任校对 韩松云

封面设计 肖勤

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 140 mm × 203 mm 印张: 4.687 5

字数: 158 千字 印数 1—3 000 册

2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-81104-188-X / V · 008

定价: 12.00 元

图书如有印装问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

内 容 简 介

本书主要介绍“疲劳分析”、“断裂力学”和“损伤力学”三门课中所涉及的基本概念、基本理论和基本分析方法。首先介绍了疲劳图和疲劳损伤积累等内容，然后重点讲解了裂纹类型与断裂韧性、应力强度因子、裂纹张开位移和 J 积分等概念以及断裂力学的分析方法，最后介绍了损伤变量、有效应力和损伤门槛值等概念，并简单地叙述了损伤力学与断裂力学的关系。

本书既可以作为结构或机械类专业的研究生和大学本科高年级学生使用，也可以作为相关研究人员的参考书。

前 言

十年前，我们在为本校（华东交通大学）的研究生新开设一门称之为“疲劳损伤和断裂”的课程时遇到了没有现成教材的困难。一方面，交叉学科、分支学科愈来愈多，并很快地应用到工程实用领域，如近几十年兴起的“断裂力学”、“损伤力学”等，这就需要学生了解这些相关课程的知识；另一方面，在大学有限的学时内，只可能要求学生掌握一些最基本的概念和原理，为学生结合今后的工作需要开展进一步的学习和研究奠定基础。为此，我们尝试将原属三门课程的内容压缩成一门新课——“疲劳、断裂与损伤”，并编写了相应的讲义。经过几年的教学实践，在逐步完善的基础上形成了今天所见到的教材。

本书主要介绍“疲劳分析”、“断裂力学”和“损伤力学”等三门课中所涉及的基本概念、基本理论和基本分析方法。考虑到“疲劳分析”是经典学科，相对来说比较简单，且便于自学；“损伤力学”理论性较强，但目前工程应用不多，故本教材将主要篇幅放在工程应用已很广泛的“断裂力学”方面。

本书适用于结构或机械类专业的研究生，也可作为已学过“弹性力学”的本科生的选修课程。参考学时为 54 学时。

由于编者水平有限，书中难免有错误或不妥之处，敬请读者批评指正。

编 者

2005 年 11 月

主要符号表

σ_{\max}	最大应力
σ_{\min}	最小应力
$\Delta\sigma$	应力变程
σ_m	平均应力
S 、 σ_s	应力幅
r	不对称系数（或循环特性）
N	循环周次
N_f	疲劳寿命
σ_r	疲劳极限（或持久极限）
a	裂纹尺寸
K_I	I型裂纹的应力强度因子
K_{II}	II型裂纹的应力强度因子
K_{III}	III型裂纹的应力强度因子
ΔK	应力强度因子幅度
K_{Ic}	I型裂纹材料的断裂韧性（或断裂韧度）
K_{IIc}	II型裂纹材料的断裂韧性
K_{IIIc}	III型裂纹材料的断裂韧性
P_Q	裂纹临界扩展载荷
δ	裂纹尖端的张开位移
δ_c	临界张开位移

J	J 积分 (或 Rice 积分)
J_{Ic}	临界 J 积分
σ_{ij}	应力张量
ε_{ij}	应变张量
$\frac{da}{dN}$	裂纹扩展速率
ΔK_{th}	疲劳裂纹扩展门槛值
D	损伤变量
D_c	损伤变量的临界值
ψ	连续度
$\bar{\sigma}$	有效应力
\bar{A}	有效承载面积
E	弹性模量
G	剪切弹性模量
μ	泊松比
\tilde{E}	损伤材料的弹性模量
ε_{p0}	损伤开始时的塑性应变
$\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$	在直角坐标系中的面力分量
f_x, f_y, f_z	在直角坐标系中的体力分量
u, v, w	在直角坐标系中的位移分量

目 录

第 1 章 疲劳分析

1.1 概述	1
1.1.1 疲劳强度的基本概念	1
1.1.2 结构疲劳失效的特征	1
1.1.3 结构疲劳的类型及疲劳设计程序	2
1.2 疲劳图	4
1.2.1 $S-N$ 曲线	4
1.2.2 $P-S-N$ 曲线 (概率 $S-N$ 曲线)	6
1.2.3 $S-N$ 曲线关系式 (经验公式)	7
1.2.4 疲劳极限线图	8
1.3 疲劳损伤积累	12
1.3.1 损伤积累的线性公式	13
1.3.2 损伤积累的指数公式	15
1.3.3 应变循环疲劳	19
1.4 复杂应力状态下的疲劳分析	20
思考题与习题	21

第 2 章 断裂力学

2.1 概述	23
--------	----

2.2 裂纹类型与断裂韧性、应力强度因子的概念	25
2.2.1 裂纹类型	25
2.2.2 应力强度因子和断裂韧性(度)	27
2.3 裂纹尖端附近的应力、应变场	29
2.3.1 弹性力学场方程及边界条件	30
2.3.2 弹性力学的解法——位移求解法和应力求解法	33
2.3.3 复变函数的基础知识	35
2.3.4 威斯特葛尔德 (Westergaard) 应力函数解法	40
2.4 应力强度因子计算	51
2.4.1 应力强度因子 K 的一般定义	52
2.4.2 迭加法求解应力强度因子	55
2.4.3 裂纹尖端塑性区及修正	57
2.5 平面应变断裂韧性 K_{IC} 及测试原理	68
2.5.1 K_{IC} 的定义及典型试样的 K_I 表达式	69
2.5.2 K_{IC} 的测试原理	72
2.5.3 $P-V$ 曲线分析	76
2.6 裂纹张开位移 (COD) 原理和方法	80
2.6.1 简述	81
2.6.2 COD 原理和 D-M 模型	81
2.7 J 积分原理	88
2.7.1 J 积分定义	88
2.7.2 J 积分的守恒性证明	90
2.7.3 线弹性条件下 J 积分与 K_I 的关系 及应变能释放率概念	93
2.7.4 J 积分的断裂判据	97
2.8 断裂力学在疲劳裂纹扩裂中的应用简介	99

2.8.1 疲劳裂纹	100
2.8.2 疲劳裂纹扩展速率	102
2.8.3 疲劳裂纹扩展寿命估算	105
2.8.4 应变疲劳	106
思考题与习题	107

第 3 章 损伤力学

3.1 概述	110
3.2 损伤的力学表示	112
3.2.1 一维损伤变量	112
3.2.2 有效应力的概念	114
3.2.3 应变等效原理	116
3.2.4 应变与损伤的耦合、断裂判据和损伤门槛值	116
3.3 损伤力学的基本方程	120
3.3.1 质量守恒定律	120
3.3.2 动量守恒方程	121
3.3.3 能量守恒定律	122
3.3.4 力学函数和内部状态变量	123
3.3.5 热力学第二定律和 Clausiu-Duhem 不等式	125
3.4 损伤与断裂	128
3.4.1 损伤力学与断裂力学的关系	128
3.4.2 损伤材料的 Dugdale 模型	131
思考题与习题	136
参考文献	138

第1章

疲劳分析

1.1 概 述

1.1.1 疲劳强度的基本概念

载荷值随时间作周期性或非周期性变化的载荷称为交变载荷，大多数承载的机械构件都在这种交变载荷作用下工作。由于载荷的变化，使试件或构件的材料内产生随时间变化的交变应力与交变应变。经足够的应力或应变循环作用后，损伤累积可使试件或结构材料产生裂纹，并使裂纹扩展，直至小片脱落或断裂的过程称为疲劳破坏。构件因发生疲劳破损而使其丧失正常工作性能的现象称为疲劳失效。试件抵抗疲劳失效的能力称为材料疲劳强度；构件抵抗疲劳失效的能力称为结构疲劳强度。

1.1.2 结构疲劳失效的特征

为正确分析机械构件的失效原因，必须区分疲劳失效与

• 疲劳、断裂与损伤 •

静强度失效的特征：

(1) 载荷的交变性：疲劳失效的构件，在其材料内部必定作用有交变应力与交变应变。

(2) 失效过程的渐变性：疲劳破坏是一个累积损伤的过程，从加载至失效需要经历一定的时间历程及应力与应变的循环过程。实践证明，不论何种疲劳，其失效过程都经历裂纹萌生、扩展和瞬时断裂三个阶段。

(3) 断口的脆性和断裂的突然性：不论构件使用脆性材料还是塑性材料，其疲劳破坏在宏观上常表现为无明显塑性变形的突然断裂，断口为脆性断口，因此疲劳失效具有很大的危险性。

(4) 应力与应变的缺口敏感性：构件在交变荷载作用下，材料内产生的应力或应变峰值会受材料本身缺陷或几何形状突变的影响产生局部增大，这种现象称为缺口敏感性，也叫应力集中或应变集中。结构疲劳失效多发生在局部高应力区域，在设计或加工中应采取相应措施来减小局部高应力的产生。

(5) 疲劳断口的独特性：疲劳断口可以看到明显的裂纹源、裂纹扩展区（光滑断面）和瞬时断裂区（粗糙断面），而其他断口无这种明显特征。

1.1.3 结构疲劳的类型及疲劳设计程序

1.1.3.1 结构疲劳的类型

(1) 按设计寿命长短分为无限寿命设计和有限寿命设计。在有限寿命设计中，寿命大于 10^5 周的称为高周疲劳，小于 10^5 周的称为低周疲劳。

(2) 按引起疲劳的载荷特性分为冲击疲劳、接触疲劳、摩擦疲劳与磨损疲劳。

(3) 按受力方式分为拉压疲劳、弯曲疲劳、扭转疲劳和复合疲劳。

(4) 按应力与时间是否有确定的函数关系分为定常疲劳和随机疲劳。

(5) 按环境温度分为常温疲劳、高温疲劳和热疲劳。

(6) 按有无腐蚀性介质作用分为一般疲劳和腐蚀疲劳，即在腐蚀环境（化学、风雨、空气等）下的疲劳。

1.1.3.2 结构疲劳强度设计的一般程序

结构疲劳强度设计程序一般分以下两步：

(1) 疲劳计算。机械构件的结构设计包括几何形状设计和结构强度设计。根据规定的运动规律完成几何设计之后，再按照整机的规定寿命、构件的工作载荷、工作环境等情况选择适当的疲劳理论、材料和必要的参数，对构件特征尺寸进行计算；或者先根据静强度理论确定特征尺寸，然后再进行寿命估算，并将计算结果与规定寿命相比较，通过对其特征尺寸、材质、加工工艺等的调整直至最后使计算寿命满足规定寿命为止。

(2) 结构疲劳试验。对无限寿命设计类型中的一般机械，由于尺寸较大，便于在运行中检测疲劳裂纹的萌生与扩展情况，并且单件失效不会造成重大事故时，可只做疲劳计算而不做疲劳试验。

对重要的机械，从确保安全可靠出发，考虑到疲劳数据的分散性和疲劳理论与构件实际使用情况之间的种种差异，还必须在疲劳计算之后再对构件做模拟疲劳试验。特别重要

• 疲劳、断裂与损伤 •

的机械，还应对构件直至整机做实物疲劳试验。

1.2 疲劳图

在实验基础上建立的疲劳载荷与疲劳寿命的关系曲线图称为疲劳图。

1.2.1 S-N 曲线

1.2.1.1 符号定义

在材料力学中，我们学习了交变应力（见图 1.1）的一些基本概念，为了便于大家学习，下面给出有关符号的定义：

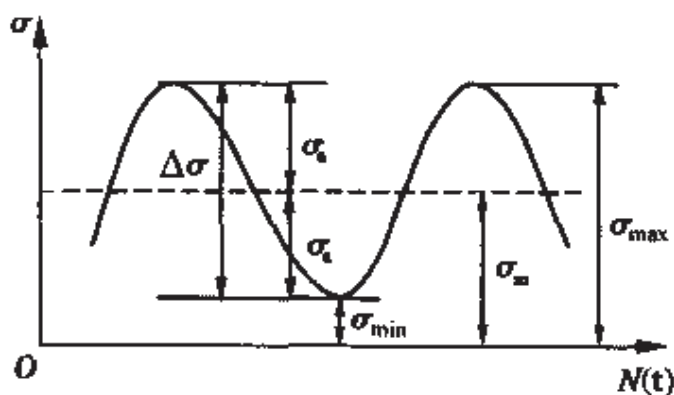


图 1.1

(1) 最大（小）应力： σ_{\max} (σ_{\min})，即循环应力中的最大值（最小值）。

(2) 应力变程： $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ ，即最大与最小应力之差。

(3) 平均应力: $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$, 即最大与最小应力之和的一半。

(4) 应力幅值: $\sigma_s = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$, 即最大与最小应力之差的一半, 也可以用 τ 表示切应力疲劳等。一般情况下, 用 S 表示应力幅值。

(5) 不对称系数: $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$, 也称为交变应力的循环特性。

上述 6 个数据 (σ_{\max} 、 σ_{\min} 、 σ_s 、 σ_m 、 r 、 $\Delta\sigma$) 中, 只有 2 个量是完全独立的。

(6) 循环周次 (代替时间 t) N : 指应力循环的次数, 而循环应力的每一个周期变化称为一个应力周期。

(7) 疲劳寿命 N_f : 在循环加载下, 产生疲劳破坏所需的应力或应变的循环周次。

(8) 疲劳极限 (或持久极限) σ_r : 当应力幅值 σ_s 小于某一极限值 σ_r 时, 试件可经受无限次应力循环而不破坏, 该极限值 σ_r 称为疲劳极限 (或持久极限), 即 σ_s 的极限值。

1.2.1.2 S-N 曲线

将试验材料制成直径为 6~10 mm 的标准试件, 按国标规定分别在旋转弯曲、拉压、扭转材料疲劳试验机上进行试验。在给定平均应力 σ_m 的情况下, 若按不同的应力幅 S 加载, 每组按同一标准 (如断裂或出现同尺寸的裂纹) 记录循环次数, 将试验结果画在应力幅值 S (或疲劳强度) 为纵坐标, 疲劳寿命 N_f 为横坐标的图上, 所得出的曲线称为 S-N 曲线, 而以正应力 σ 为纵坐标的称为 σ -N 曲线, 以切应力 τ 为纵坐

标的称为 τ - N 曲线，如图 1.2 所示。

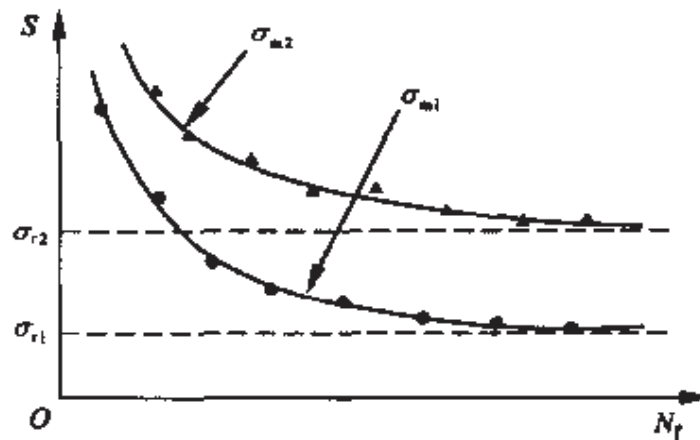


图 1.2

当应力幅 S 低于一定值时，不出现疲劳破坏，此时对应 S 的值 σ_r 称为疲劳极限（或持久极限）。对高周疲劳，一般定义 $N_f = 10^7$ （对金属材料而言）。

工程中最常见的 S - N 曲线是在对称循环实验条件下的，即此时 $\sigma_m = 0$ ， $r = -1$ 。通常此时，疲劳极限的数值为最小。

1.2.2 P - S - N 曲线（概率 S - N 曲线）

由于试件材料的微观力学性能具有统计特征，加之加工工艺以及试验条件上的差异，即使在同一应力幅的作用下，试验所得的数据也会有一定的离散性和分布规律。实验表明，其分布大部分属于正态分布（或韦布尔 Weibull 分布）。因此，对一个应力幅而言，靠单根试件试验所得的疲劳寿命不能反映这种材料在该应力幅作用下的真正寿命。要获得具有代表性的数值，通常用一组试件在同一应力幅 S 作用下试验，获得一组 N_f 的数据，再用概率统计的方法求出该数据组的概率

分布。据此，若把试验结果按不同的概率 P 整理在 S 为纵坐标、 N_f 为横坐标的图上，即可以绘出 P - S - N 曲线，如图 1.3 所示。正态分布时，曲线 AB 为破坏概率 $P = 50\%$ 的疲劳曲线； CD 是破坏概率 $P = 1\%$ 的疲劳曲线； EF 是破坏概率 $P = 10\%$ 的疲劳曲线。工程上一般给出的 S - N 曲线，可理解为破坏概率 $P = 50\%$ 的情况，也就是图中的 AB 曲线。

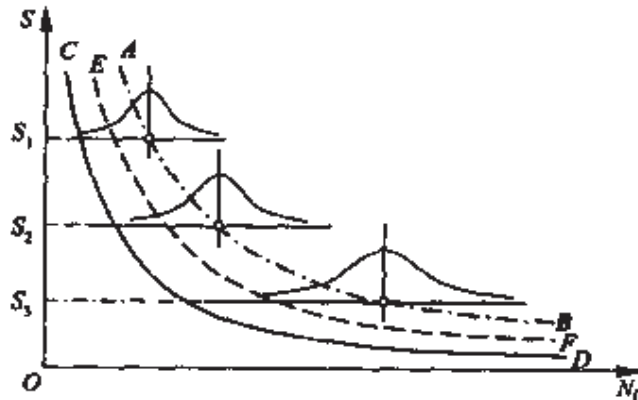


图 1.3

1.2.3 S - N 曲线关系式 (经验公式)

S - N 曲线 (见图 1.4 (a)) 关系式一般可以采用回归曲线办法得到，工程中常用的有指数型的经验关系式，如设

$$N_f = CS^a$$

其中 C 和 a 为待定常数。若对上式两边取对数，则有

$$\lg N_f = \lg C + a \lg S$$

如果以 $\lg N_f$ 为横坐标，以 $\lg S$ 为纵坐标，则上式可表示成一条直线，如图 1.4 (b) 所示，即在双对数坐标中，由实验所得的数据按线性回归的方法可得出疲劳极限的经验公式。

• 疲劳、断裂与损伤 •

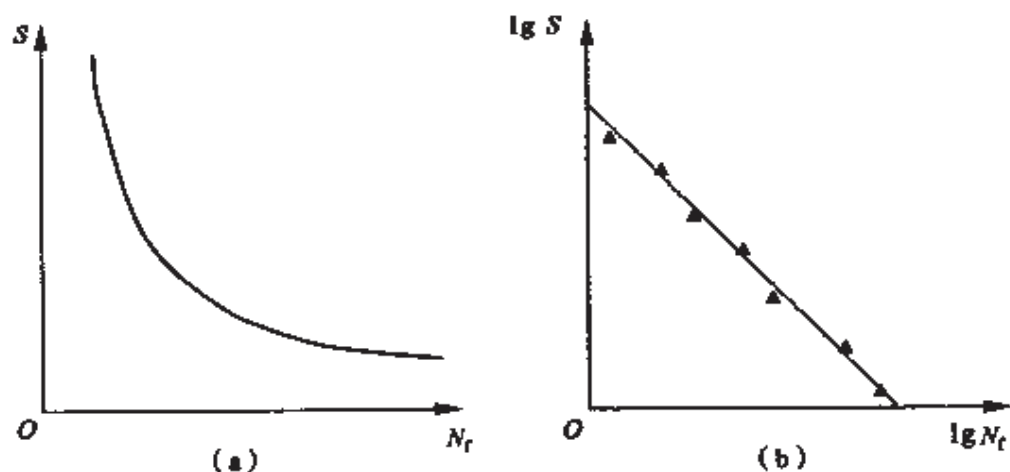


图 1.4

1.2.4 疲劳极限线图

$S-N$ 曲线可以通过对称循环和非对称循环得到，并且不同应力比 r 所得到的 $S-N$ 曲线也不同。为了使用方便，最好能有一种应力比在 $-1 \leq r \leq +1$ 的范围表示各种 $S-N$ 曲线的线图，这种线图称为疲劳极限线图，简称疲劳图。常用的疲劳图有两种：一是史密斯 (Smith) 疲劳图，即以平均应力 σ_m 为横坐标，最大应力 σ_{\max} 及最小应力 σ_{\min} 为纵坐标绘出的疲劳极限线图；二是黑格 (Haigh) 疲劳图，即以平均应力 σ_m 为横坐标、应力幅 σ_a 为纵坐标绘出的疲劳极限线图。

1.2.4.1 史密斯疲劳图

在史密斯疲劳图 (见图 1.5) 中，曲线 $C'AC$ 表示最大应力极限，即材料疲劳极限；曲线 $C'A'C$ 表示最小应力值，在曲线 $C'AC$ 与 $C'A'C$ 所围面积内的任一点，表示不产生疲劳破坏的应力水平及其循环特性。两曲线所围面积以外的任一点，

表示其所代表的应力水平和循环特性的交变应力，使材料或构件经有限次应力循环即会产生疲劳破坏。最大应力线 $C'AC$ 与最小应力线 $C'A'C$ 相交于 C 点，即表示的应力状态为最大应力等于最小应力，也就是静载荷破坏点，其纵坐标和横坐标都等于材料的强度极限。曲线 $C'A'C$ 与横轴相交于 D 点， D 点的最小应力等于零。从 D 点作横坐标轴的垂直线，交曲线 $C'AC$ 于 B 点， B 点的纵坐标值表示脉动循环应力的疲劳极限 σ_0 。纵轴上的 A 、 A' 两点的平均应力 σ_m 均为零，所以其纵坐标值表示对称循环的疲劳极限 σ_{-1} 。

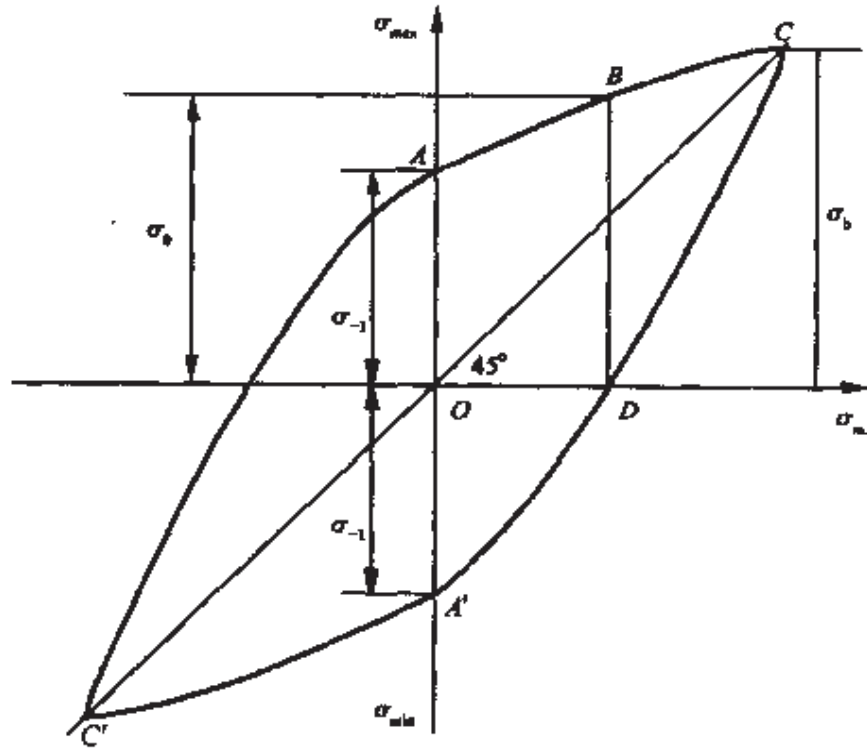


图 1.5

1.2.4.2 黑格疲劳图

黑格疲劳图是以应力幅 σ_a 为纵坐标，平均应力 σ_m 为横坐标，由实验得到的疲劳极限数据绘出的曲线 ACB ，如图 1.6

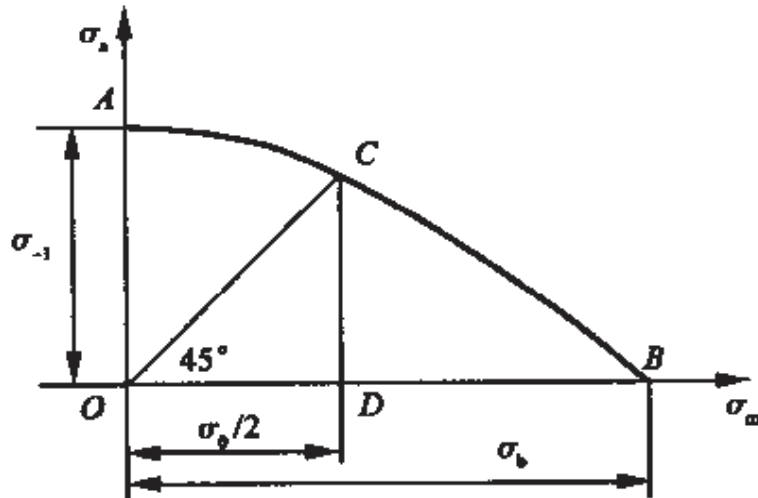


图 1.6

所示，为典型的黑格疲劳图。曲线 ACB 上任意一点的纵坐标和横坐标之和都代表一定循环特性为 r 的疲劳极限。曲线上 A 点的平均应力 $\sigma_m = 0$ ，故它代表材料的对称循环疲劳极限 σ_{-1} 。点 B 和点 D 的应力幅 $\sigma_a = 0$ ，分别代表材料的强度极限 σ_b 和屈服极限 σ_s 。由原点 O 作与横轴成 45° 的直线与曲线 ACB 相交于 C ，过 C 点作横轴垂线交于 D 点，则 $OD = DC$ ，即 $\sigma_m = \sigma_a$ ，因 $\sigma_{max} = \sigma_a + \sigma_m$ 所以有

$$OD = DC = \frac{1}{2}\sigma_0$$

这里 σ_0 为脉动循环的疲劳极限。

黑格疲劳图与史密斯疲劳图一样，曲线内任一点表示不产生疲劳破坏的交变应力，曲线外的任一点表示经有限次应力循环即产生疲劳破坏的交变应力。

1.2.4.3 疲劳极限图的方程式

用方程式来描述材料的疲劳极限线，不同的观点有不同

的假设，因此用不同的假设可将黑格疲劳图线用下列方程式近似求出：

(1) 假设疲劳极限线是经过对称循环疲劳极限 A 点和静强度极限 B 点的抛物线，或称为戈倍尔 (Gerber) 图线，如图 1.7 中的曲线 1，其方程式是

$$\sigma_s = \sigma_{-1} \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right)^2 \right]$$

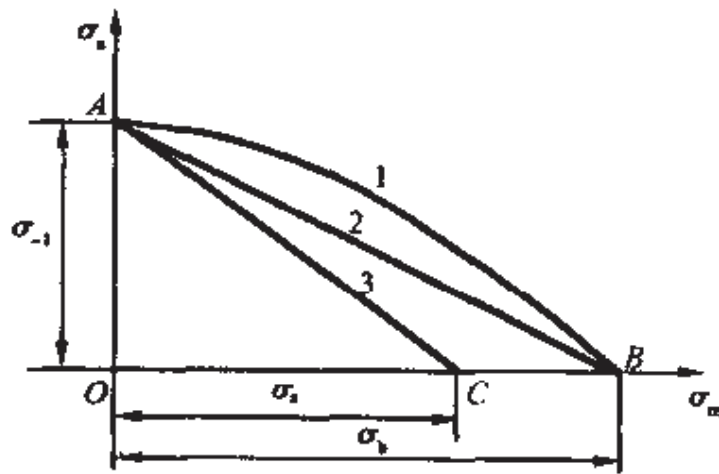


图 1.7

(2) 假设疲劳极限线是经过对称循环疲劳极限 A 点和静强度极限 B 点的一条直线，或称为古特曼 (Goodman) 图线，如图 1.7 中的曲线 2 所示，其方程是

$$\sigma_s = \sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right)$$

该公式考虑平均应力的影响，而且是工程中最流行的经验公式之一。

显然，当 $\sigma_s = 0$ ，即为静载时，必有 $\sigma_m = \sigma_b$ ，其中 σ_b 为

• 疲劳、断裂与损伤 •

材料的强度极限，即图 1.7 中的 B 点。

当 $\sigma_m = 0$ ，即为对称循环时，必有 (A 点) $\sigma_s = \sigma_{-1}$ 。

(3) 假设疲劳极限线是经过对称循环疲劳极限 A 点和静屈服极限 C 点的一条直线，或称为索德倍尔格 (Soderberg) 图线，如图 1.7 中的曲线 3 所示，其方程是

$$\sigma_s = \sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right)$$

若按疲劳极限线图假定，当 σ_s 与 σ_m 落在 AOB 图形内时，不会产生疲劳破坏，即当 $\sigma_s \leq \sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right)$ 时，材料或构件是安全的。如果更保守一些，当 $\sigma_s = 0$ ，若令 $\sigma_m = \sigma_s$ ，则 Goodman 方程就变为 Soderberg 方程。

上述的 Goodman 或 Soderberg 方程是对单轴应力而言，在许多工程应用中，工作应力多是二维或三维的。例如，对复杂应力状态，可采用能量等效的办法 (如 Mises 准则)，得到有效疲劳极限

$$\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_{1\max}^2 + \sigma_{2\max}^2 + \sigma_{3\max}^2 - \sigma_{1\max}\sigma_{2\max} - \sigma_{3\max}\sigma_{2\max} - \sigma_{2\max}\sigma_{3\max})^{1/2} \\ - \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_e} \right) (\sigma_{1m}^2 + \sigma_{2m}^2 + \sigma_{3m}^2 - \sigma_{1m}\sigma_{2m} - \sigma_{2m}\sigma_{3m} - \sigma_{3m}\sigma_{1m})^{1/2}$$

其中 σ_m 是主应力 σ_i ($i=1, 2, 3$) 的平均值。当然，对于单一的非零主应力，上式就简化为前述的 Soderberg 方程。

1.3 疲劳损伤积累

前面所述的疲劳都是在应力幅不变的情况下，称为等

幅疲劳。但是，多数零部件在工作中所受的循环载荷是变幅的，有些是有规则的，有些是随机变化的。对于应力幅是不变的情况，我们在上一章讨论过，而对于应力幅是变化的，即零部件承受多级载荷作用的情况（见图 1.8），可以采用积累损伤的办法来估算零部件的疲劳寿命 N_f 。

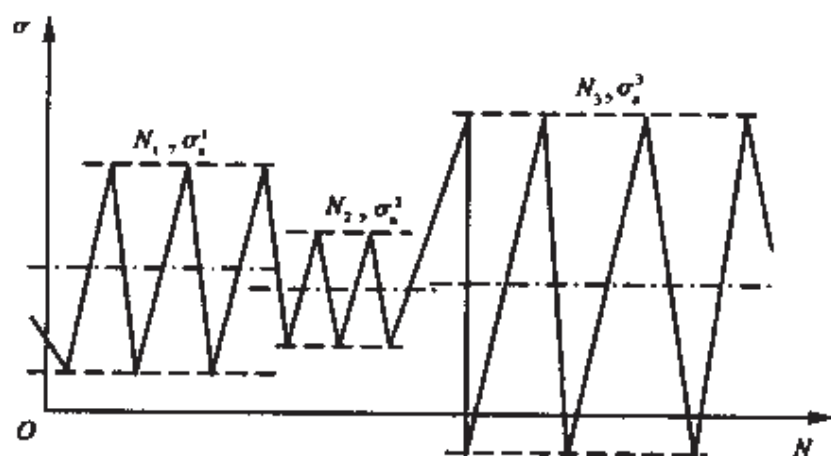


图 1.8

当材料承受高于疲劳极限的应力时，每次循环都使材料产生一定量的损伤，这种损伤是能积累的。当损伤积累到临界值时就会发生破坏，这就是疲劳损伤积累理论。

例如，如图 1.8 所示的多级载荷谱，当 $\sigma_i^{(i)} > \sigma_i'$ ($i=1,2,\dots$) 时表示载荷增加，即加载；当 $\sigma_i^{(i)} < \sigma_i'$ 时则表示载荷减小，即减载。

1.3.1 损伤积累的线性公式

当整个过程中有不同的疲劳应力幅时，给出寿命估算的最简单的经验规律就是迈内尔 (Miner) 假设。迈内尔提出，若循环加载为一系列不同的应力幅 $\sigma_1^i, \sigma_2^i, \sigma_3^i, \dots$ ，而对应

• 疲劳、断裂与损伤 •

于每一应力幅的疲劳寿命分别为 $N_{r1}, N_{r2}, N_{r3}, \dots$, 循环周次分别为 N_1, N_2, N_3, \dots 时, 则在每一应力幅作用下用掉的疲劳寿命为实际循环周次 N_i 除以寿命周次 N_{ri} , 即 N_i/N_{ri} 。设想损伤是以这样的方法积累起来的, 即损伤累积为:

$$\frac{N_1}{N_{r1}} + \frac{N_2}{N_{r2}} + \frac{N_3}{N_{r3}} + \dots = \sum_i \frac{N_i}{N_{ri}} = 1$$

此式即为著名的 Miner 线性积累损伤准则, 也称为疲劳损伤积累的线性方程式。实验表明, 加载顺序对计算结果有影响。对于增载, 一般 $\sum N_i/N_{ri} > 1$, 这是因为先加低应力, 对材料会产生低载的“锻炼”效应, 使裂纹的形成时间延时。反之, 对于减载, 一般 $\sum N_i/N_{ri} < 1$, 因为先加高应力时, 会促使材料提前形成裂纹。若在幅载荷中引入一短时过载, 有可能延长疲劳寿命 N_f 。

为了便于研究材料的损伤, 可以引入损伤变量 D

$$D = 1 - \frac{\tilde{A}}{A}$$

其物理意义是表示由于损伤而丧失承载能力的面积与初始无损伤时的原面积之比, 其中 \tilde{A} 是有效承载面积; A 是名义面积 (原面积)。

当 $D = D_c$ (临界损伤变量) 时, 材料破坏, 则在 σ_a^i 作用下的损伤为:

$$D_i = \frac{D_c N_i}{N_{ri}}$$

当 $N_i = N_{ri}$ 时, $D_i = D_c$, 材料破坏, 而按迈内尔 (Miner)

假设有 $\sum \frac{N_i}{N_{ri}} D_c = D_c$, 即 $\sum \frac{N_i}{N_{ri}} = 1$ 。

1.3.2 损伤积累的指数公式

由于线性损伤积累准则不够准确，可以考虑 D 与 $\frac{N_i}{N_0}$ 之间是非线性关系，其中较为简单的是引入幂函数关系，即

$$D_i = \left(\frac{N_i}{N_0} \right)^\alpha D_c$$

其中 α 为常数，一般取 $D_c = 1$ 。若令 $\frac{N_i}{N_0} = B_i$ ，即称为寿命分数，则上式可改写成

$$D_i = B_i^\alpha D_c$$

在图 1.9 中，直线 OAC 代表疲劳损伤积累线性方程；曲线 OBC 表示在应力幅 σ_1^1 作用下，损伤与循环比值为指数关

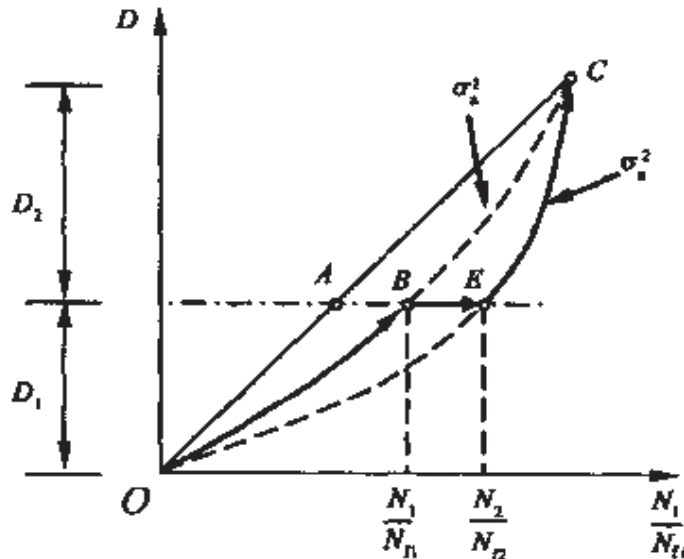


图 1.9

• 疲劳、断裂与损伤 •

系的曲线；曲线 OEC 表示在应力幅 σ_2^2 作用下，损伤与循环比值为指数关系的曲线。根据损伤达到临界值即产生破坏的概念，两曲线的交点 C 表示损伤临界值的点。

若载荷顺序为先 σ_1^1 后 σ_2^2 ，且 $\sigma_1^1 > \sigma_2^2$ ，如图 1.9 所示，试求在 σ_1^1 作用下循环 N_1 后的剩余寿命 $N_{2\text{剩}}$ ，则有

(1) 按 Miner 关系计算，其损伤的路径为 OAC ，如图 1.9 所示，因此有

$$D_c = D_1 + D_2 = 1 = \frac{N_1}{N_{r1}} + \frac{N_2}{N_{r2}}$$

则剩余寿命为

$$N_{2\text{剩}} = N_{r2} \left(1 - \frac{N_1}{N_{r1}} \right)$$

(2) 按指数关系计算，损伤路径为 \widehat{OB} 和 \widehat{EC} ，此时显然有

$$\sum \frac{N_i}{N_{ri}} = \frac{N_1}{N_{r1}} + \frac{N_2}{N_{r2}} < 1$$

今假设曲线 OBC 的指数方程为 $D = \left(\frac{N_1}{N_{r1}} \right)^{\alpha_1}$ ，曲线 OEC 的指数方程为 $D = \left(\frac{N_2}{N_{r2}} \right)^{\alpha_2}$ （这里 $\alpha_1 < \alpha_2$ ），则在一个给定的 D 上，例如在 BE 线上的 B 点和 E 点，两个方程式应该相等，即

$$D_B = \left(\frac{N_1}{N_{r1}} \right)^{\alpha_1} = D_E = \left(\frac{N_{2\text{剩}}}{N_{r2}} \right)^{\alpha_2}$$

其中 $N_{2\text{等}}$ 表示在 σ_1^1 作用下的 N_1 次相当于在 σ_2^2 作用下的 $N_{2\text{等}}$ 次, 所以有

$$\frac{N_{2\text{等}}}{N_{t2}} = D_B^{1/a_1}$$

又因为 $\frac{N_{2\text{等}}}{N_{t2}} = 1 - \frac{N_{2\text{等}}}{N_{t2}}$, 所以可得剩余寿命为

$$N_{2\text{等}} = N_{t2} \left[1 - \left(\frac{N_1}{N_{t1}} \right)^{a_1/a_2} \right]$$

或写成

$$N_{2\text{等}} = N_{t2} (1 - B_1^{a_1/a_2})$$

同理, 若载荷顺序为先 σ_2^2 后 σ_1^1 , 且 $\sigma_1^1 > \sigma_2^2$, 则有在 σ_1^1 作用下循环 N_2 后的剩余寿命为

$$N_{1\text{等}} = N_{t1} \left(1 - \frac{N_2}{N_{t2}} \right)$$

$$N_{1\text{等}} = N_{t1} \left[1 - \left(\frac{N_2}{N_{t2}} \right)^{a_2/a_1} \right]$$

例 1.1 在 $\sigma_i^i (i=1,2,3)$ 作用下的 $D-B$ 关系如图 1.10 所示, 且假设 $D_i = \left(\frac{N_i}{N_{ti}} \right)^{a_i} = B_i^{a_i}$, 若加载顺序为 $\sigma_1^1, \sigma_2^2, \sigma_3^3$, 试求已知加载循环 N_1, N_2 后的剩余寿命 $N_{3\text{等}}$ 。

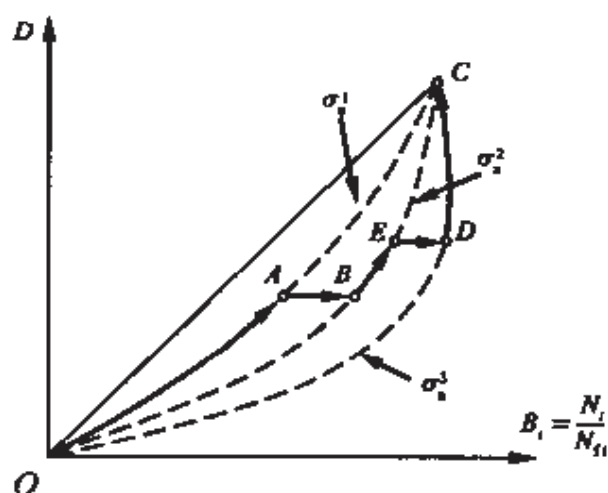


图 1.10

解：(1) 如图 1.10 所示，有 $D_A = D_B$ ， $D_A = \left(\frac{N_1}{N_{f1}}\right)^{\alpha_1}$
 $= B_1^{\alpha_1} = D_B = \left(\frac{N_{2\text{相}}}{N_{f2}}\right)^{\alpha_2}$ ，即在 σ_1 作用下 N_1 次，相当于在 σ_2 的作
 用下 $N_{2\text{相}}$ 次，有 $N_{2\text{相}} = N_{f2} \left(\frac{N_1}{N_{f1}}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$ 。

在 σ_2 作用下再由 B 点到 E 点，其总的循环数为

$$N_{2\text{总}} = N_2 + N_{2\text{相}}$$

(2) 如图 1.10 所示，有 $D_E = D_D$ ，同理有

$$N_{3\text{相}} = N_{f3} \left(\frac{N_{2\text{总}}}{N_{f2}}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}$$

将 $N_{2\text{总}}$ 代入上式，得

$$N_{3耗} = N_{r2} \left[\frac{N_2 + N_{r2} (N_1/N_{r1})^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}}{N_{r2}} \right]^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

(3) 计算剩余寿命，因为 $N_{3剩} = N_{r3} - N_{3耗}$ ，所以有

$$N_{3剩} = N_{r3} \left\{ 1 - \left[\frac{N_2 + N_{r2} (N_1/N_{r1})^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}}{N_{r2}} \right]^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right\}$$

或写成

$$N_{3剩} = N_{r3} \left[1 - (B_2 + B_1^{\alpha_1/\alpha_2})^{\alpha_1/\alpha_2} \right]$$

上述两式均为在加载循环 N_1 , N_2 后的剩余寿命 $N_{3剩}$ 。

1.3.3 应变循环疲劳

前面的内容主要是研究应力控制条件下的疲劳问题，即载荷是以力或应力为控制量的疲劳问题，当工作应力较高而失效循环数 N 较低 ($10^3 < N < 10^5$) 时，这种类型的疲劳称为低周疲劳。由于低周疲劳的工作应力较高，一般接近或超过材料的屈服极限，此时应力与应变之间不再保持线性关系，若再采用力或应力作控制量，则 S 与 N 之间的数据很分散。当改用变形或应变作控制量时， ϵ 与 N 之间有很好的规律，所以低周疲劳又称作塑性疲劳或应变疲劳。在低周疲劳中，常忽略弹性应变分量，仅考虑塑性应变分量 ϵ_p ，常采用

• 疲劳、断裂与损伤 •

曼森-科芬 (Manson-Coffin) 公式计算, 即为

$$N_f = C \left(\frac{\Delta \epsilon_p}{2} \right)^\alpha$$

其中 $\Delta \epsilon_p / 2$ 为塑性应变幅, N_f 为疲劳寿命, α 和 C 为材料常数。在热疲劳中也常采用应变控制, 而类似于应力控制条件下, 有

$$N_f = C \sigma_s^\alpha$$

其中应力幅为 $\sigma_s = \frac{\Delta \sigma}{2} = \frac{\sigma_1}{2}$, N_f 为疲劳寿命, α 和 C 为材料常数。

1.4 复杂应力状态下的疲劳分析

在复杂应力条件下的疲劳分析一般都采用等效应力 (或称为相当应力) 的办法 (例如: 接触疲劳、腐蚀疲劳、热疲劳、低温疲劳和随机疲劳, 等等) 来分析。这样做就可以将在单向应力状态下获得的实验结果用到复杂应力状态中去 (类似于材料力学中分析复杂应力状态下的强度问题)。

复杂应力状态下的疲劳分析有很多假设, 下面仅以对称应力循环为例:

在对称应力循环中取应力主向为 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, 即指一个单元体的应力状态表示方法。设 $\sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3$ (不是指前面所定义的不同应力水平的概念) 分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 方向的应力幅, 且假设都是同向的对称循环, 即各应力主向平均应力为零。主应力空间是指用应力空间表示不同的应力状态 (任一点)。按照材料力学中相当应力概念, 设 σ_1 是单向对称应

力循环下的疲劳极限，则有

(1) 最大正应力（拉）理论

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{-1}$$

其中相当应力为 $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1$ 。

(2) 最大正应变（或伸长线应变）理论

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{-1}$$

其中 μ 为泊桑系数。

(3) 最大剪应力理论

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{-1}$$

(4) 形状改变比能理论（或变形能、歪形能理论和畸变能）

$$\sigma_{\text{eq}} = \left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \right\}^{1/2} = \sigma_{-1}$$

一般来说变形能假设较准确一些，最大剪应力假设次之。总之以上各理论均有较大近似性。另外，对于更复杂一些的加载情况，问题要复杂得多。此外还有其他求等效应力的办法，如平均应力等效，等等。

思考题与习题

1. 什么是结构疲劳强度？结构疲劳失效有何特征？
2. 什么是疲劳图？试述常用的史密斯疲劳图和黑格疲劳图的区别与联系？

• 疲劳、断裂与损伤 •

3. 简述 Miner 线性积累损伤准则。
4. 损伤变量的定义是指什么？其物理意义是什么？
5. 写出按损伤积累的指数公式计算的剩余寿命。

第2章

断裂力学

2.1 概 述

长期以来，工程上对结构或构件的计算方法，是以结构力学和材料力学为基础的。它们通常都假定材料是均匀的连续体，没有考虑客观存在的裂纹和缺陷，计算时只要工作应力不超过许用应力，就认为结构是安全的，反之就是不安全的。工作应力根据载荷情况、构件几何尺寸计算出来，许用应力则根据工作条件和材料性质选用。

对于实际结构中可能存在的缺陷和其他考虑不到的因素，都放在安全系数里考虑。安全系数并未考虑到其他失效形式的可能性，例如脆性断裂或快速断裂。人们曾普遍认为，选用较高的安全系数就能避免这种低应力断裂。然而，实践证明并非如此，材料存在缺陷或裂纹的结构或构件，在应力值远低于设计应力的情况下就会发生全面失效。这样的例子很多，因而动摇了上述传统设计思想的安全感，使人们认识

到，对含有裂纹的物体必须作进一步的研究。断裂力学就是在这个基础上应运而生的。

断裂力学是研究带裂纹体的强度以及裂纹扩展规律的一门学科。由于研究的主要对象是裂纹，因此，人们也称它为“裂纹力学”。它的主要任务是：研究裂纹尖端附近的应力应变情况，掌握裂纹在载荷作用下的扩展规律；了解带裂纹构件的承载能力，从而提出抵抗断裂的设计方法，以保证构件的安全工作。由于断裂力学能把含裂纹构件的断裂应力和裂纹大小以及材料抵抗裂纹扩展的能力定量地联系在一起，所以，它不仅能圆满地解释常规设计不能解释的“低应力脆断”事故，而且也为了避免这类事故的发生找到了办法。同时，它也为发展新材料、创造新工艺指明了方向，为材料的强度设计打开了一个新的领域。

由于研究的观点和出发点不同，断裂力学分为微观断裂力学和宏观断裂力学。微观断裂力学是研究原子位错等晶粒尺度内的断裂过程，根据对这些过程的了解，建立起支配裂纹扩展和断裂的判据。宏观断裂力学是在不涉及材料内部的断裂机理的条件下，通过连续介质力学分析和试件的实验做出断裂强度的估算与控制。而宏观断裂力学又分为线弹性断裂力学和弹塑性断裂力学。本书主要讨论宏观断裂力学的基本原理及其在工程实际中的应用。

近年来研究人员将可靠性理论及统计方法与断裂力学的规律、方法等联系起来，发展了概率断裂力学，并应用这种理论和方法进行可靠性设计和寿命预测，使之成为机械产品可靠性设计的重要方法之一。

2.2 裂纹类型与断裂韧性、应力强度因子的概念

2.2.1 裂纹类型

裂纹可按受力和破坏方式、裂纹在构件中的位置以及裂纹的形状分类。

2.2.1.1 接受力和破坏方式分类

在实际构件中的裂纹，由于外加作用力的不同，可以分为三种基本状态，即张开型裂纹、滑开型裂纹和撕开型裂纹，如图 2.1 所示。

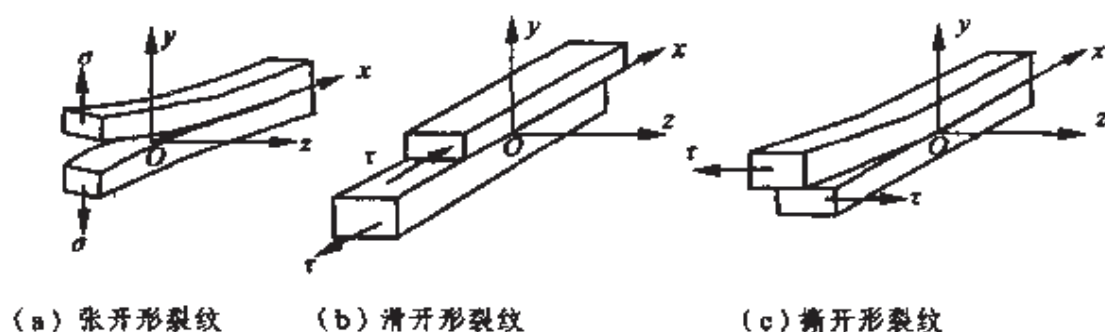


图 2.1

(1) 张开型 (I 型) 裂纹[见图 2.1 (a)]: 裂纹受垂直于裂纹面的拉应力的作用, 使裂纹面产生张开位移。

(2) 滑开型 (II 型) 裂纹[见图 2.1 (b)]: 裂纹受平行于裂纹面, 并且垂直于裂纹前缘的剪应力的作用, 使裂纹在平面内相对滑开。

(3) 撕开型 (III 型) 裂纹[见图 2.1 (c)]: 裂纹受平行

于裂纹面，并且平行于裂纹前缘的剪应力的作用，使裂纹相对错开。

如果裂纹同时受正应力和剪应力的作用，或裂纹与正应力成一角度，这时就同时存在 I 型和 II 型、或 I 型和 III 型裂纹，称为复合型裂纹。实际裂纹体中的裂纹可能是两种或两种以上基本型的组合。其中 I 型裂纹是低应力断裂的主因，是最危险的，也是多年来实验和理论研究的主体。当实际裂纹是复合型裂纹时，往往作为 I 型处理，这样更安全些。因此张开型（I 型）裂纹是我们研究的重点。

2.2.1.2 按裂纹在构件中的位置分类

按裂纹在构件中的位置可以分为穿透裂纹、表面裂纹和深埋裂纹，如图 2.2 所示。

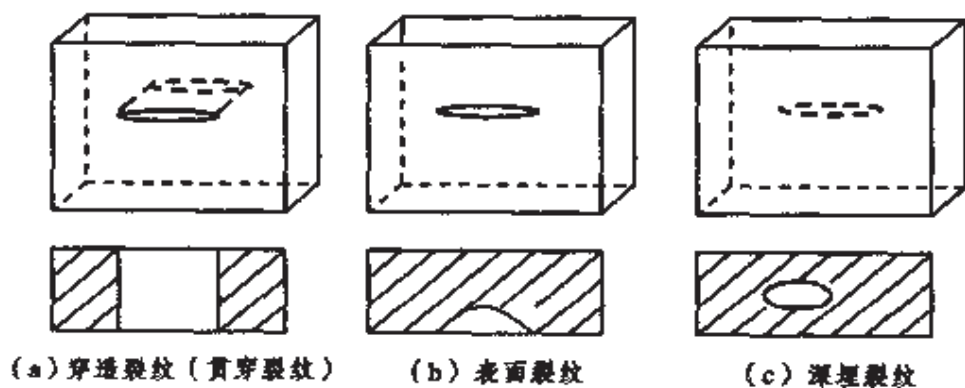


图 2.2

(1) 穿透裂纹[见图 2.2 (a)]: 贯穿构件厚度的裂纹称为穿透裂纹。通常把裂纹延伸到构件厚度一半以上的都视为穿透裂纹，并简化为理想的尖裂纹处理，即裂纹尖端的曲率半径趋近于零，这种简化是偏于安全的。穿透裂纹可以是直线的、曲线的或其他形状的。

(2) 表面裂纹[见图 2.2 (b)]: 裂纹位于构件表面, 或裂纹深度相对构件厚度比较小就作为表面裂纹处理。对于表面裂纹常简化为半椭圆形裂纹。

(3) 深埋裂纹[见图 2.2 (c)]: 裂纹位于构件内部, 常简化为椭圆片状裂纹或圆片裂纹。

2.2.1.3 按裂纹的形状分类

根据裂纹的真实形状, 一般可简化为圆形、椭圆形、表面半圆形、表面半椭圆形以及贯穿直裂纹等。

2.2.2 应力强度因子和断裂韧性 (度)

如图 2.3 所示的无限大薄板上有长度为 $2a$ 的穿透裂纹, 在远场受均匀分布的拉应力 σ 的作用, 属于 I 型裂纹。在图 2.3 所示的直角坐标系下, 按弹性力学计算, 可得

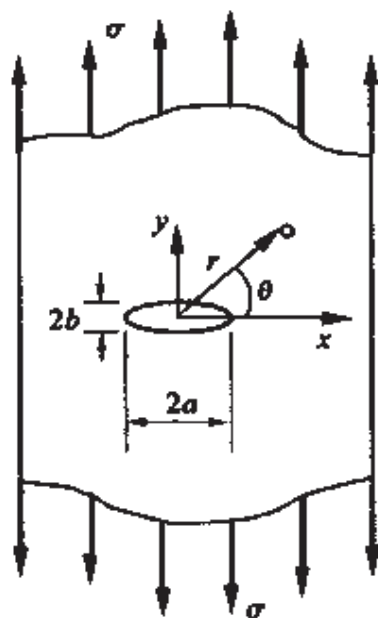


图 2.3

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{Y\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{Y\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi r}} f_x(\theta) \\
 \sigma_y &= \frac{Y\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos\frac{\theta}{2} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{Y\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi r}} f_y(\theta) \\
 \tau_{xy} &= \frac{Y\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \\
 &= \frac{Y\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi r}} f_{xy}(\theta)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

或写成统一形式

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

式中， a 为裂纹尺寸； σ 为裂纹位置上按无裂纹计算的应力，称为名义应力； Y 是与构件形状有关的一个量，称为形状系数；参量 $K_I = Y\sigma\sqrt{a}$ 是与位置极坐标 r 、 θ 无关的常数； r 、 θ 是极坐标，如图 2.3 所示。

由应力场公式 (2.1) 可见，该公式有如下特点：

(1) 应力与 $r^{-1/2}$ 成正比，在裂纹尖端处 ($r, 0$)，应力为无限大，即在裂纹尖端应力出现奇点，应力场具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性。只要存在裂纹，不管外载荷多么小，裂纹尖端应力总是无穷大，按照传统的观点，就应该发生破坏，当然，这与事实不符。这就意味着，不能再用应力的大小来判断

裂纹是否扩展、破坏是否发生。

(2) 应力与参量 K_I 成正比。在同一变形状态下，不论其他条件怎样不同，只要 K_I 值相同，则裂纹尖端邻域的应力场强度完全相同，所以 K_I 反映了裂纹尖端邻域的应力场强度，称为裂纹尖端应力场强度因子，简称为应力强度因子。其下标 I 表示为 I 型裂纹的应力强度因子，同理， K_{II} 为 II 型裂纹的应力强度因子， K_{III} 为 III 型裂纹的应力强度因子。

应力强度因子的量纲为 [力] × [长度]^{-3/2}，国际单位为 牛顿 · 米^{-3/2} ($N \cdot m^{-3/2}$)；工程制单位为 千克 · 毫米^{-3/2} ($kg \cdot mm^{-3/2}$)

(3) 由 $K_I = Y\sigma\sqrt{a}$ 可见，对于给定的 a 、 Y ，随着 σ 的增加（或给定 Y 和 σ ，而 a 增加），则 K_I 也会增加。当 K_I 增加达到一定值时，构件就会发生断裂破坏，此时的 K_I 值用 K_{Ic} 表示，称为材料的断裂韧性（或断裂韧度），是材料的常数。同理有 II 型裂纹断裂韧性 K_{IIc} 和 III 型裂纹断裂韧性 K_{IIIc} 。

(4) 由上述可见，应力强度因子 K_I 与材料的断裂韧性 K_{Ic} 的关系，类似于材料力学中的工作应力 σ 与材料的极限应力 σ_s 的关系。

2.3 裂纹尖端附近的应力、应变场

物体发生脆性断裂时，若物体不产生塑性变形，则理想化地认为物体是弹性的。物体变形时，若服从虎克定律，则可认为它是线弹性体。于是问题归结为含裂纹物体的线弹性力学分析，称为线弹性断裂力学，其以线弹性理论为基础，研究含裂纹的材料在线弹性变形阶段发生裂纹失稳扩展的规

• 疲劳、断裂与损伤 •

律，即理想脆性断裂的规律。

I型和II型裂纹的脆断问题；归结为平面问题的含裂纹线弹性体的线弹性力学分析，III型裂纹则归结为反平面问题分析。

2.3.1 弹性力学场方程及边界条件

2.3.1.1 弹性力学场方程

(4-1)

按照弹性力学分析，线弹性体体内的场方程有以下三类：

(1) 空间问题的平衡方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2a)$$

或写成矩阵式

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (2.2b)$$

或改写成张量表达式

$$\sigma_{y,j} + f_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.2c)$$

平面问题时

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

(2) 空间问题的几何方程:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.4a)$$

或写成张量表达式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4b)$$

(3) 物理方程, 即广义虎克定律:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \quad (2.5a)$$

• 疲劳、断裂与损伤 •

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

或写成张量表达式

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.5b)$$

式中 λ 称为拉梅 (Lame) 常数, E 为弹性模量, G 为剪切弹性模量, θ 为体积应变即 $\theta = \varepsilon_{ii}$, δ_{ij} 为单位张量, 即 $i = j$ 时分量为 1; $i \neq j$ 时分量为 0:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

如果材料是各向同性的, 则有

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (2.7)$$

2.3.1.2 边界条件

边界条件有两种形式, 即位移边界条件和应力边界条件:

(1) 位移边界条件, 若已知线弹性体边界上的位移为 \bar{u} , 则有

$$u = \bar{u}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

(2) 应力边界条件, 若已知在线弹性体边界上作用的应力为 $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$, 则有

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \\ \bar{f}_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

或写成张量表达式

$$\sigma_{ij} l_j = \bar{f}_i \quad (2.10)$$

式中 l_i 是边界的法线与坐标轴夹角的余弦。

平面问题分为平面应力问题和平面应变问题。它们的场方程即平衡方程与几何方程完全相同，仅物理方程有一些区别。若 E 用 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， μ 用 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 代替，则物理方程的形式也完全相同，故平面应变问题可按平面应力问题求解，最后结果用 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 代 E ，用 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 代 μ 即可。

2.3.2 弹性力学的解法——位移求解法和应力求解法

在弹性力学中，位移求解法是指用位移 u_i 作为基本未知函数，从几何方程和物理方程求出用 u_i 表示的应力分量 σ_{ij} ，代入平衡方程，得到用 u_i 表示的三个平衡方程，再加上边界条件（面力边界条件也转化成用位移表示的边界条件），求出位移分量 u_i ，然后由 u_i 导出应力分量 σ_{ij} 和应变分量 ε_{ij} 。该方法可求解任何边界条件（包括混合边界条件）。

应力求解法是用应力分量 σ_{ij} 作为基本未知函数的分析方法，此时独立的平衡方程数少于未知函数，故需要补

• 疲劳、断裂与损伤 •

充用应力表示的变形协调方程。例如，由几何方程得平面问题的协调方程为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.11)$$

由此，可得常体力情况下的平面问题的相容方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.12a)$$

即 $\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$ (2.12b)

式中 ∇^2 为拉普拉斯微分算子， $\sigma_x + \sigma_y$ 是调和函数。

应力边界条件为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

而平面问题的平衡方程参见式 (2.3)。

设有连续函数 $\varphi(x, y)$ ，且令

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - f_x y - f_y x \end{aligned} \right\} \quad (2.14a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - f_x x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - f_y y \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.14b)$$

则由 $\varphi(x, y)$ 定义的应力场将满足平衡条件, 将式 (2.14a) 或式 (2.14b) 代入相容方程式 (2.12) 得

$$\nabla^4 \varphi(x, y) = 0 \quad (2.15)$$

式中 $\varphi(x, y)$ 称为艾瑞 (Airry) 应力函数, 是双调和函数。

由上述可见, 任何一个双调和函数 $\varphi(x, y)$ 所定义的应力场都能满足所有的场方程, 问题的特殊性表现在应力函数 $\varphi(x, y)$ 必须满足不同的边界条件。通常, 只要找到一个既满足双调和方程 (2.15) 又满足具体问题边界条件的应力函数 φ , 即可求解出弹性平面问题。因而求平面问题的解就是要求满足边界条件的双调和方程的解。

2.3.3 复变函数的基础知识

很多带裂纹的弹性体的问题, 用复变函数解决更为方便。因此, 为了方便读者, 下面将介绍一些有关复变函数的基础知识。

2.3.3.1 复数的概念

以 x 为横坐标 (实轴)、 y 为纵坐标 (虚轴) 表示的某平面上任一点 A 所对应的数 z 称为复数, 而该平面称为复平面, 如图 2.4 所示, 即

$$z = x + iy \quad (2.16)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位; $x = \operatorname{Re} z$ 为实部 (Real Number); $y = \operatorname{Im} z$ 为虚

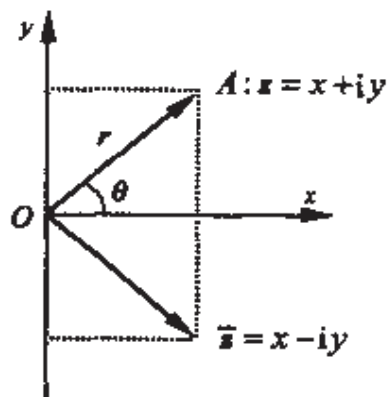


图 2.4

• 疲劳、断裂与损伤 •

部 (Imaginary Number)。而 z 的共轭复数为 $\bar{z} = x - iy$ 即实轴对称。

在复平面，任何一点对应一个复数 z ，其模为

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.17)$$

而复数 z 的辐角 (argument) 为

$$\theta = \arg z = \arctan \left| \frac{y}{x} \right| \quad (2.18)$$

2.3.3.2 复数的表示方法

复数在不同的坐标系中有不同的表示方法，一般常用的有三种

(1) 代数式: $z = x + iy$, (2.19)

(2) 三角式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (2.20)

(3) 指数式: $z = re^{i\theta}$ (2.21)

2.3.3.3 复变函数

以复数 z 为自变量的函数 $Z = f(z)$ 称为复变函数。若有 $Z = f(z)$ ，则复变函数可写成

$$\begin{aligned} Z = f(z) &= \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \\ &= \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z) \end{aligned} \quad (2.22)$$

例如，若已知某一复变函数为 $f(z) = z^2$ ，则有

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

所以有 $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} f(z) = 2xy$

2.3.3.4 解析函数的概念

若复变函数 $f(z)$ 在域 D 内处处可微，则称 $f(z)$ 在域 D 内为解析函数。若在某一点 $f(z_0)$ 没有导数，则此点 z_0 是解析函数的一个奇点。解析函数 $f(z)$ 的导函数 $f'(z)$ 仍为解析函数。

2.3.3.5 柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 条件

在域 D 内要使复变函数 $f(z)$ 是解析的重要条件之一为柯西-黎曼条件，即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial y} &= -\frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

下面仅证明其必要性：

对 $z = x + iy$ 求偏导得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i \quad (2.24)$$

因此，函数 $f(z)$ 对 x 、 y 分别求偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial x} &= \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz} \\ \frac{\partial f(z)}{\partial y} &= \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df(z)}{dz} i \end{aligned} \quad (2.25)$$

即有

$$i \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial y} \quad (2.26)$$

又因为函数 $f(z)$ 可写成

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z) \quad (2.27)$$

将该式代入上式，可得式 (2.23)，证毕。

柯西-黎曼条件的推论：

(1) 解析函数 $f(z)$ 导函数 $f'(z)$ 的实部等于 $f(z)$ 实部对 x 的偏导或 $f(z)$ 虚部对 y 的偏导，即

$$\operatorname{Re} f'(z) = \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial y} \quad (2.28)$$

(2) 解析函数 $f(z)$ 导函数 $f'(z)$ 的虚部等于 $f(z)$ 虚部对 x 偏导或 $f(z)$ 实部对 y 的偏导的反号，即

$$\operatorname{Im} f'(z) = \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial y} \quad (2.29)$$

2.3.3.6 调和函数

设解析函数为 $Z = f(z)$ ，若存在两个任意函数 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ ，并且可将该解析函数 Z 表示成

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (2.30)$$

的形式，则该函数 $\varphi(x, y)$ 、 $\psi(x, y)$ 均为调和函数，并且满足

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = 0, \quad \nabla^2 \psi(x, y) = 0 \quad (2.31)$$

该两式称为调和方程。

证明：由柯西-黎曼条件式 (2.23) 知：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.32)$$

分别对 x, y 求偏导得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (2.33)$$

故有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi(x, y) = 0 \quad (2.34a)$$

或 $\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.34b)$

同理，有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{及} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

再分别对 y, x 求偏导，可得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.35)$$

故有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) = 0 \quad (2.36a)$$

或 $\nabla^2 \psi = 0 \quad (2.36b)$

因此，这就证明了复变解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数。

• 疲劳、断裂与损伤 •

同理，可证复变解析函数 $f(z)$ 的各阶导数和各次积分都是解析函数，各阶导数和各次积分的实部和虚部也都是调和函数。

2.3.4 威斯特葛尔德 (Westergaard) 应力函数解法

在弹性力学中，对常体力的平面问题用应力求解就是求满足边界条件的双调和函数，即应力函数 φ 应满足双调和(或相容)方程 $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$ 。

Westergaard 应力函数法是解析法中最简单的一种，控制方程和全部边界条件需要精确地得到满足。优点是可得到应力强度因子的解析表达式，但只有较简单的几何形状物体可用解析法。Westergaard 应力函数法可以解一些简单的平面问题，如 I 型裂纹和反平面问题。

2.3.4.1 I 型裂纹的 Westergaard 应力函数解法

Westergaard 设定的应力函数为

$$\varphi = \operatorname{Re} f(z) + y \operatorname{Im} f'(z) \quad (2.37)$$

式中 $f(z)$ 为解析函数； $f'(z)$ 为其一阶导数。

将式 (2.37) 两边求 ∇^2 ，得

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \operatorname{Re} f(z) + \nabla^2 y \operatorname{Im} f'(z) \quad (2.38)$$

展开，整理得

$$\nabla^2 \varphi = 2 \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} f'(z) \quad (2.39)$$

由式 (2.29), 有: $\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} f'(z) = \operatorname{Re} f''(z)$, 所以代入上式, 得

$$\nabla^2 \varphi = 2 \operatorname{Re} f''(z) \quad (2.40)$$

对上式求 ∇^2 , 得

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 2 \nabla^2 \operatorname{Re} f''(z) = 0 \quad (2.41)$$

上式说明 Westergaard 应力函数 φ 满足弹性力学的常体力平面问题的相容方程。

利用柯西-黎曼条件及其推论可以容易求得应力分量(不计体力)为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \operatorname{Re} f''(z) - y \operatorname{Im} f'''(z) \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \operatorname{Re} f''(z) + y \operatorname{Im} f'''(z) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} f'''(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

若令 $Z_1 = f''(z)$, 则得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z_1(z) - y \operatorname{Im} Z_1'(z) \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z_1(z) + y \operatorname{Im} Z_1'(z) \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1'(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

此解有在 $y=0$ 的线上 $\tau_{xy} = 0$ 和 $\sigma_x = \sigma_y$ 的性质, 用 Westergaard 应力函数只能求解应力分量具有这个特点的 I 型问题。

利用物理方程及式 (2.30), 可求得应变分量为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [(1-\mu)\operatorname{Re} Z_1 - (1+\mu)y \operatorname{Im} Z_1'] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [(1-\mu)\operatorname{Re} Z_1 + (1+\mu)y \operatorname{Im} Z_1'] \\ \varepsilon_{xy} &= -\frac{1}{2G} y \operatorname{Re} Z_1' \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

此式为平面应力问题的应变分量；若是平面应变问题，则将 E 换成 $E/(1-\mu^2)$ ， μ 换成 $\mu/(1-\mu)$ 即可。利用几何方程，可求得平面应力问题的位移分量

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} [(1-\mu)\operatorname{Re} \bar{Z}_1 - (1+\mu)y \operatorname{Im} Z_1] \\ v &= \frac{1}{E} [2 \operatorname{Im} \bar{Z}_1 - (1+\mu)y \operatorname{Re} Z_1] \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

式中 $\bar{Z}_1 = \int Z_1 dz = f'(z)$ 。对平面应变问题，同上述一样将 E 和 μ 更换即可。

从上述式 (2.43)、式 (2.44) 和 (2.45) 可见，对 I 型裂纹尖端应力场分析可归结为由边界条件求复变函数 $Z_1(z)$ 的问题。

2.3.4.2 I 型裂纹尖端的应力场

下面利用 Westergaard 应力函数解法，分析受不同的远场应力作用下的 I 型裂纹尖端应力场问题：

1. 双向受拉 I 型裂纹

如图 2.5 所示，无限大平板含有一贯穿裂纹，裂纹长为 $2a$ ，在远场受双向均布拉应力 σ 作用。先取裂纹中心为坐标原点， x 轴与裂纹面重合， y 轴垂直于裂纹面。该问题的边界条件是

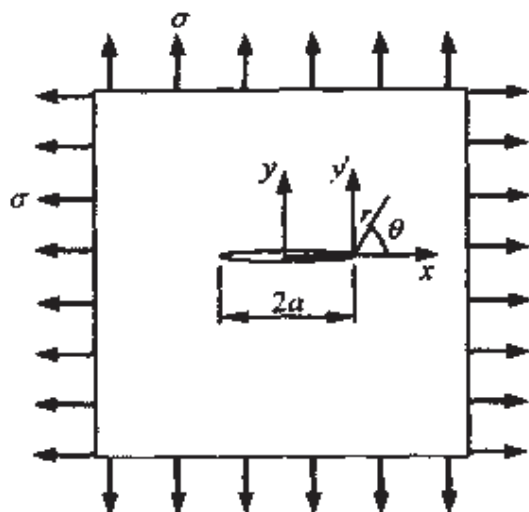


图 2.5

在 $y=0, |x|<a$ 处, 即裂纹内边界上, 有

$$\sigma_y = 0, \tau_{yx} = 0 \quad (2.46)$$

而在 $|z| \rightarrow \infty$ 处, 即无限大板的边界上, 其应力与不含裂纹的无限大板相同, 即

$$\sigma_x = \sigma, \sigma_y = \sigma, \tau_{xy} = 0 \quad (2.47)$$

根据问题的对称性, 在除裂纹面外的 x 轴上, 剪应力 τ_{xy} 应恒为零, 又考虑到上述边界条件的特点, 设复变函数为

$$Z_1(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.48)$$

下面来验证该式是否满足边界条件:

当 $z \rightarrow \infty$ 时, 由式 (2.48) 可得

$$Z_1 = \sigma, Z_1' = 0$$

显然, 由式 (2.43) 得 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma, \tau_{xy} = 0$ 能满足。

• 疲劳、断裂与损伤 •

当 $y=0$, $-a < x < a$ 时, $z=x$, 代入式 (2.48), 有

$$Z_1(z) = \frac{-\sigma x}{\sqrt{a^2 - x^2}} i$$

因此, 有 $\operatorname{Re} Z_1(z) = 0$ 。又因为 $y=0$, 所以, 由式 (2.43) 知, 式 (2.46) 满足。综上所述, 所设的复变函数 $Z_1(z)$ 能满足边界条件。

为了求得裂尖附近的应力场表达式, 将坐标原点移到裂纹右尖端处, 采用新坐标, 如图 2.5, 令 $\xi = z - a$, 则由式 (2.48) 得

$$Z_1(\xi) = \frac{\sigma(\xi + a)}{\sqrt{\xi^2 + 2a\xi}} \quad (2.49)$$

在裂尖附近, 也就是 ξ 很小的区域内, 上式简化为

$$Z_1(\xi) \approx \frac{\sigma a}{\sqrt{2a\xi}} \quad (2.50)$$

其中 ξ 为微小量, 其指数式为 $\xi = re^{i\theta}$, 则有

$$Z_1(\xi) = \frac{\sigma a}{\sqrt{2a}} r^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\theta}{2}} \quad (2.51)$$

根据复变函数的欧拉公式, 上式可写成

$$Z_1(\xi) = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.52)$$

同理, 可求出

$$Z_1'(\xi) = -\frac{\sigma}{2r} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.53)$$

这样，就得到 $Z_1(z) = Z_1(\xi)$ 和 $Z_1'(z) = Z_1'(\xi)$ ，另外，有 $y = r \sin \theta = 2r \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ 。将它们代入式 (2.43)，得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

其中 $K_I = \sigma \sqrt{a\pi}$ ，是 I 型应力强度因子。

利用上述式 (2.44) 和式 (2.45)，方法同上可求出裂尖附近的应变分量 and 位移分量分别为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\mu) - (1+\mu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\mu) + (1+\mu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{K_I}{2G\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-\mu) + (1+\mu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - (1+\mu) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

上述公式请读者自行证明。

2. 单向受拉 I 型裂纹

如图 2.6 所示，无限大平板含有一贯穿裂纹，裂纹长为 $2a$ ，在远场受单向均布拉应力 σ 作用。先取裂纹中心为坐标原点， x 轴与裂纹面重合， y 轴垂直于裂纹面。设有一函数为

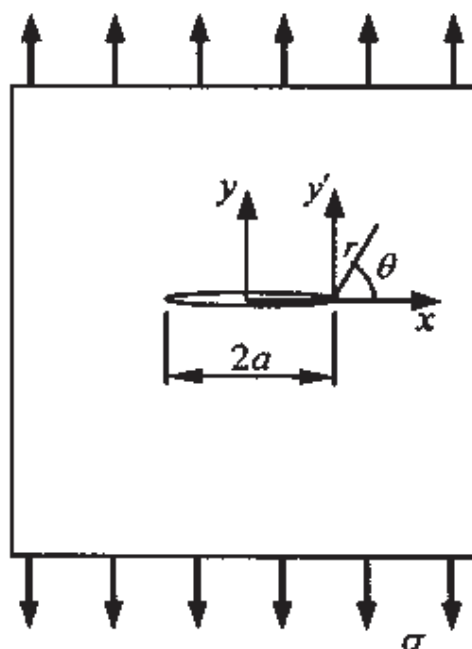


图 2.6

$$\varphi = \operatorname{Re} \bar{Z}_1 + y \operatorname{Im} \bar{Z}_1 + \frac{A}{2}(x^2 - y^2) \quad (2.57)$$

可以证明 φ 是双调和函数，可作应力函数，数有：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1' - A \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1' + A \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z_1' \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

其中 A 是实数时容易验证, 当取

$$Z_1 = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - A \quad (2.59)$$

时, 满足下列边界条件:

在 $y=0, |x| < a$ 处, 有 $\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$; 而在 $Z \rightarrow \infty$ 处 $\sigma_y = \sigma, \sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$ 。并由该边界条件, 可求得 $A = \sigma/2$ 。

仿照双向受拉 I 型裂纹分析, 同理可得在裂尖附近有:

$$Z_1 = \sigma \sqrt{\frac{a}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} - \frac{\sigma}{2} \quad (2.60)$$

同样可得裂尖附近应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \sigma \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

2.3.4.3 II 型、III 型裂纹尖端的应力场

II 型裂纹问题是在无穷远处受有均布剪应力作用, 如图 2.7, 考虑此种情况下的全部边界条件, 并注意到应力函数及由此所决定的应力场、位移场反对称于 x 轴, Westergaard 选取如下应力函数:

$$\varphi = -y \operatorname{Re} \bar{Z}_0(z)$$

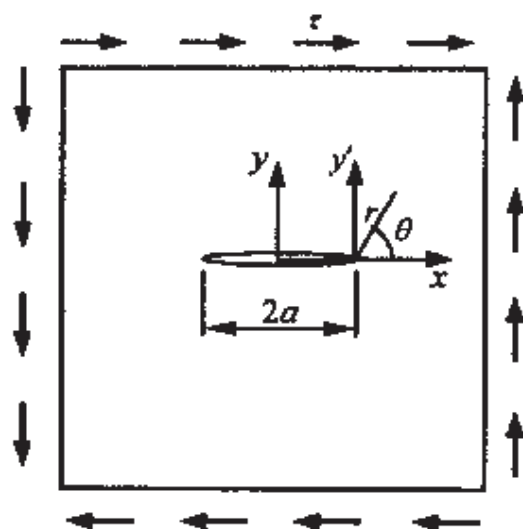


图 2.7

显然满足 $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$ ，则

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Im}Z_{II}(z) + y\text{Re}Z'_{II}(z) \\ \sigma_y &= -y\text{Re}Z'_{II}(z) \\ \tau_{xy} &= \text{Re}Z_{II}(z) - y\text{Im}Z'_{II}(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\mu}{E} \left[\frac{2}{1+\mu} \text{Im}\bar{Z}_{II}(z) + y\text{Re}Z_{II}(z) \right] \\ v &= \frac{1+\mu}{E} \left[-\frac{1-\mu}{1+\mu} \text{Re}\bar{Z}_{II}(z) - y\text{Im}Z_{II}(z) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

仿照 I 型讨论，设 $Z_{II}(z) = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ ，显然其满足下列边界条件：

(1) 当 $y=0, |x| < a$ 时， $\tau_{xy} = \sigma_y = 0$ ；

(2) 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $\tau_{xy} = \tau$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$ 。

若移动坐标原点, 作 $\xi = z - a$ 变换, 则有

$$Z_{II}(\xi) = \frac{\tau(\xi + a)}{\sqrt{(\xi + a)^2 - a^2}} \quad (2.64)$$

当 $\xi \gg 1$ 时, 有

$$Z_{II}(\xi) \approx \frac{\tau a}{\sqrt{2a\xi}} = \tau \sqrt{\frac{a}{\pi}} \xi^{-\frac{1}{2}} \quad (2.65)$$

将式 (2.65) 代入式 (2.62) 并注意 $\xi = re^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)$, 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

另外, 代入式 (2.63), 则有

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + (1 + \mu) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[(\mu - 1) + (\mu + 1) \sin \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

其中: $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$, 是 II 型应力强度因子。

III 型裂纹 (撕开型) 是反平面问题。裂纹面沿 z 方向位移 $w \neq 0$, 而 $u = 0$, $v = 0$ 。由此可以得到: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, 如图 2.8 所示。

• 疲劳、断裂与损伤 •

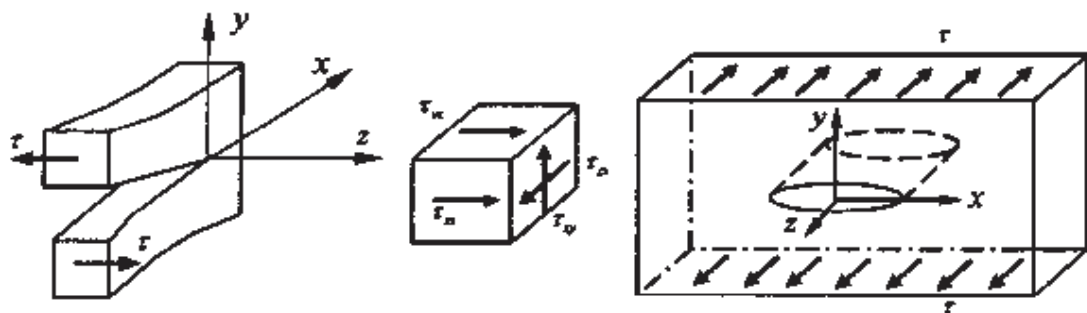


图 2.8

平衡方程、物理方程有：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \tau_x &= G\gamma_x = G \frac{\partial w}{\partial x} \\ \tau_{yx} &= G\gamma_{yx} = G \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

解上式得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w = 0 \quad (2.69)$$

故 w 是调和函数，Westergaard 选择位移函数

$$w = \frac{1}{G} \text{Im} \bar{Z}_{III}(z) \quad (2.70)$$

并有

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= G \frac{\partial w}{\partial x} = \text{Im} Z_{III}(z) \\ \tau_{yx} &= G \frac{\partial w}{\partial y} = \text{Re} Z_{III}(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

对于图 2.8 所示无限大平板中含有 $2a$ 贯穿板厚的 III 型裂纹，可设

$$Z_{\text{III}}(z) = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.72)$$

满足全部边界条件，变换后有

$$Z_{\text{III}}(\xi) = \frac{\tau(\xi + a)}{\sqrt{\xi(\xi + 2a)}} \quad (2.73)$$

代入式 (2.71)、(2.60) 并注意 $\xi = re^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)$ ，有

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= -\frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ w &= \frac{K_{\text{III}}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

上式即为图 2.8 所示尖端附近的应力场和位移场，其中， $K_{\text{III}} = \tau\sqrt{\pi a}$ 为 III 型应力强度因子。

2.4 应力强度因子计算

前面介绍的 I、II、III 型裂纹问题应力场、应变场中含有参量 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} ，这些参数控制了裂纹尖端的应力场、应变场，是表示场强弱的物理量，它们分别称为 I、II、III 型裂纹尖端应力场强度因子，简称应力强度因子。

由上述可知，用应力本身来表征裂纹尖端的应力场强弱是不适宜的，因为 $r \rightarrow 0$ 时，各应力分量都无限增大。而应力强度因子却可以有效地表征裂纹尖端附近的应力场强度，它是判断裂纹是否将进入失稳状态的一个指标。因此，求裂纹体的应力强度因子是线弹性断裂力学中很重要的一项工作。

由于裂尖应力场强度取决于应力强度因子，所以多年来，人们已经分析研究了许多情况下的应力强度因子，其中以 P. C. Paris 和 G. C. Sih (薛昌明) 的研究最为突出。《应力强度因子手册》给出了大量的公式，对于不同加载情况、不同裂纹形状的应力强度因子的计算公式，可查阅该手册得到。

确定应力强度因子的方法有三大类，即解析法、数值解法和实验方法，每一类中又有若干种方法。解析法只能计算简单的问题，大多数问题需要采用数值解法。当前工程中广泛采用的数值解法是有限单元法，但由于需要计算机容量较大、精度尚欠佳等原因，人们正在探索其他有效的数值解法，奇异和超奇异积分方程直接数值解法就是其中的一种。对于复杂问题，用数值解法仍有困难，往往用光弹实验等实验方法。本章将介绍两种简单的解析法，着重叙述基本原理。

2.4.1 应力强度因子 K 的一般定义

不失一般性，若设复变解析函数 $Z(\xi)$ 满足边界条件时，则有应力强度因子的计算公式

$$K = \lim_{\xi \rightarrow 0} Z(\xi) \sqrt{2\pi\xi} \quad (2.75)$$

此为一般表达式，对于不同的边界条件，应力强度因子 K 有不同的形式。但对于不同的边界，只需寻找到一个满足全部

边界条件的 $Z(\xi)$ ，即可确定相应边界条件下的 K 。

例 2-1 对 I 型无穷大板在远场受双向等拉应力情况，计算其应力强度因子。

解：若选取

$$Z_1(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

由 $z = \xi + a$ 作变换，即有

$$Z_1(\xi) = \frac{\sigma(\xi + a)}{\sqrt{(\xi + a)^2 - a^2}} = \frac{\sigma(\xi + a)}{\sqrt{(\xi + 2a)\xi}} \quad (2.76)$$

显然满足全部边界条件。则有

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} \cdot Z_1(\xi) \\ &= \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} \cdot \frac{\sigma(\xi + a)}{\sqrt{(\xi + 2a)\xi}} \\ &= \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\sigma(\xi + a)}{\sqrt{(\xi + 2a)}} \\ &= \sigma\sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (2.77)$$

对 II、III 型裂纹，同样可取 $Z(z) = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ ，即有

$$Z(\xi) = \frac{\tau(\xi + a)}{\sqrt{(\xi + 2a)\xi}}, \text{ 同理可求得}$$

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}, K_{III} = \tau\sqrt{\pi a} \quad (2.78)$$

例 2-2 I 型无限大板，在裂纹表面受集中力 p 作用，如图 2.9 所示，计算其应力强度因子。

• 疲劳、断裂与损伤 •

解：取复变解析函数

$$Z_1(z) = \frac{2pz\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi(z^2 - b^2)\sqrt{z^2 - a^2}}$$

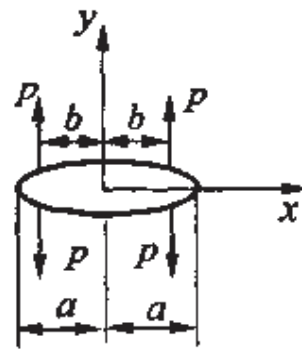


图 2.9

可满足此种情况的全部边界条件，即

(1) 当 $z \rightarrow \infty$ 时， $Z_1(z) \rightarrow 0$ ，显然有

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0;$$

(2) 当 $|z| < a, y = 0$ 时，除去 $x = \pm b$ 奇点外，在裂纹自由表面上 $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 。

利用 Westergaard 的应力函数解法，由式 (2.42) 和式 (2.43) 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \operatorname{Re} Z_1(z) + y \operatorname{Im} Z_1'(z) = \operatorname{Re} Z_1(z) \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1'(z) \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

而当 $x^2 < a^2$ 时， $Z_1(z)$ 是纯虚数，故有

$$\sigma_y = \operatorname{Re} Z_1(z) = 0 \quad (2.80)$$

(3) 根据对称性，可取第一象限部分薄平板研究，如图 2.10 所示。由平衡条件知，在 x 轴所在截面上内力的总和为 p ，即

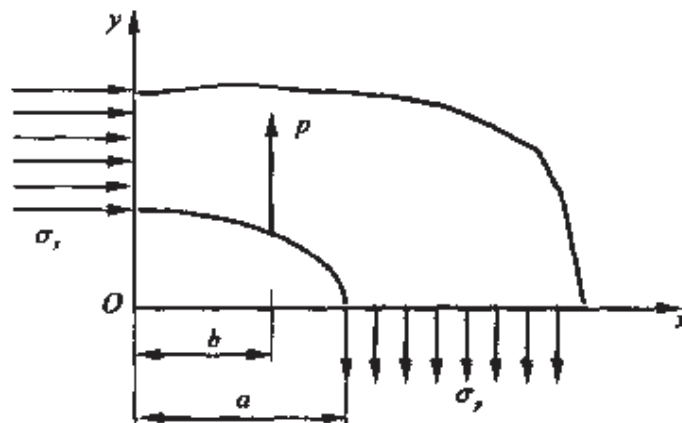


图 2.10

$$\int_a^{\infty} \sigma_y dx = p \quad (2.81)$$

此时 $x > a, y = 0$, 则 $Z_1(z) = \operatorname{Re} Z_1(z)$ 为纯实数, 所以现在所取的 $Z_1(z)$ 是能够满足这个条件的。因此, 仿照上述方法, 同样可得

$$K_1 = \frac{2p\sqrt{a}}{\sqrt{\pi(a^2 - b^2)}} \quad (2.82)$$

此式为该例裂纹尖端的应力强度因子, 利用它根据迭加原理可以解决很多问题。而其他各种应力强度因子的表达式可从有关文献中查阅。

2.4.2 迭加法求解应力强度因子

在线弹性力学中, 当几个载荷同时作用在某一弹性体上时, 载荷组在某一点引起的应力和位移等于各单个载荷在该点处引起的应力和位移分量之总和, 这就是线弹性理论的迭加原理。

上述迭加原理对于在线弹性范围的应力强度因子 K 也适用, 即在复杂载荷组作用下, 裂纹尖端处总的应力强度因子等于各单个载荷作用下, 各应力强度因子的代数和——这就是 K 的迭加原理。利用这个原理, 在求复杂载荷下的 K 时, 可以把它分解为几个简单受载条件下的 K 之和, 后者可以利用已有的应力强度因子手册, 并从其中查到。

例 2-3 I 型无限大板受远场单向拉应力 σ 作用, 如图 2.11 (a) 所示。求 K_1 。

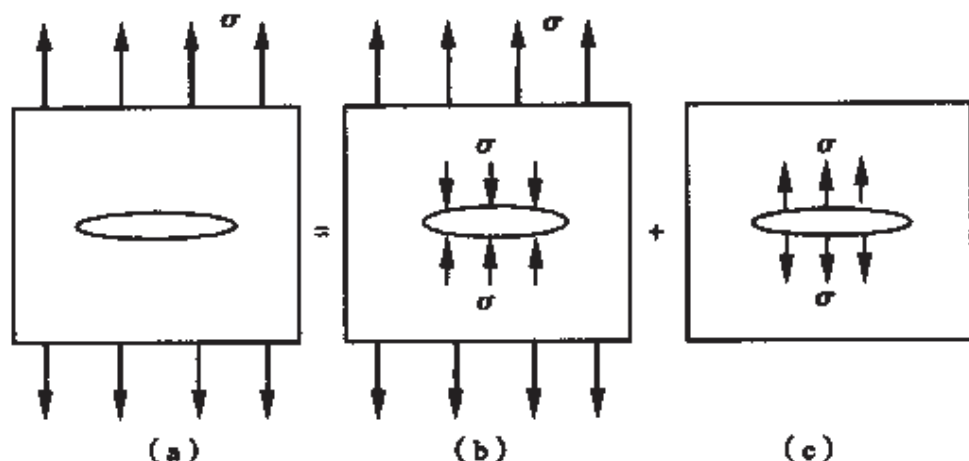


图 2.11

解：将图 2.11 (a) 所示的单向拉应力 σ 外载进行分解，如图 2.11 所示。按照迭加原理，可得 $K_I^{(a)} = K_I^{(b)} + K_I^{(c)}$ 而图 2.11 (b) 的情况相当于无裂纹板，即 $K_I^{(b)} = 0$ 。所以有

$$K_I^{(a)} = K_I^{(c)} = \sigma\sqrt{\pi a}$$

例 2-4 I 型无限大板，在裂纹 $|x| \leq a$ 范围内受均布载荷 q ，如图 2.12 所示，用迭加原理来求 K_I 。

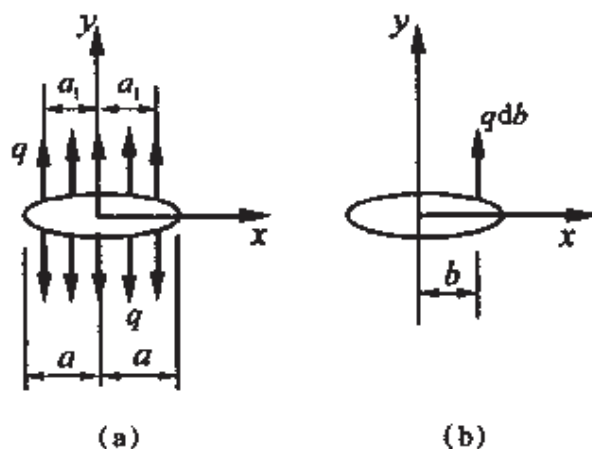


图 2.12

解：在此种情况下，可不必像以往那样去找满足边界条

件的 $Z_1(z)$ 函数, 可根据 (2.82) 式提供的解答运用迭加原理, 直接计算出应力强度因子 K_I 值。

在 $x = \pm a_1$ 范围内, 取微段 db , 在 db 上受有的载荷 qdb 可看成集中力, 则用 qdb 代替 (2.82) 式中的 p , 并利用迭加原理可得:

$$K_I = \int_b^m \frac{2qdb}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

若将变量替换, 令 $b = a \sin \theta$, 则有 $\sqrt{a^2 - b^2} = a \cos \theta$, $db = a \cos \theta d\theta$ 代入上式并经积分后可得

$$K_I = 2q \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{a_1}{a} \right) \quad (2.83)$$

当整个裂纹表面上均受有均布载荷 q 作用时, 只要将式 (2.83) 中的 a_1 用裂纹的边长 a 来代替, 即可得到在此种情况下的应力强度因子 K_I 值, 即

$$K_I = 2q \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{a}{a} \right) = 2q \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} = q \sqrt{\pi a} = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.84)$$

K 的计算有各种方法, 如解析法、数值计算 (有限元、边界配位法等) 和光弹性法等。

2.4.3 裂纹尖端塑性区及修正

上述应力强度因子 K 的计算, 都假设材料是完全线弹性的, 但实际的金属材料总是存在不同程度的塑性, 因此, 在裂纹顶端的材料中总难免要发生塑性变形。因为裂纹顶端的

应力场是与 $\sqrt{2\pi r}$ 成反比的，所以愈接近裂纹顶端应力愈大。当 $r \rightarrow 0$ 时，应力将会无限增大；当 r 小到一定程度时，裂纹顶端的应力达到材料的屈服强度时，裂纹顶端的材料就要发生塑性变形而屈服，形成一个屈服区域，称为塑性区。当这个屈服区较小时（称为小范围屈服），线弹性断裂力学理论仍可适用，不过要做一定的修正。但如果材料的韧性很好，或试样尺寸很小，以致在临界条件前裂纹顶端的塑性区就充分大（称为大范围屈服），这时用线弹性断裂力学就不行了，而必须用弹塑性断裂力学了。

从实质上来说，对任何材料，无论强度高低，无论韧性好坏，无论载荷大小，裂纹顶端都不可避免地存在塑性区。在用线弹性断裂力学的方法处理实际问题时，大多要考虑这个塑性区的影响，要在计算应力强度因子时进行塑性区修正。

2.4.3.1 屈服条件的一般形式

所谓屈服条件就是指材料超出了弹性阶段而开始进入塑性阶段的条件。如各种应力组合满足这个条件，就会发生塑性变形，即进入弹塑性阶段。

1. 简单应力状态情况

单向拉伸的屈服条件为：

$$\sigma_1 = \sigma_s$$

扭转屈服条件为：

$$\tau = \tau_s$$

2. 复杂应力状态情况

对复杂应力状态就不那么简单了，必须找到普遍的屈服

形式，使之适用于任何受力形式。因为在弹性阶段，应力和应变服从虎克定律，所以在开始产生塑性变形的瞬时，应变仍可由该瞬时的应力唯一地确定（之后的应变还取决于加载史），故在应力空间屈服条件可写成

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = c$$

对于主应力空间，屈服条件则写成

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = c$$

上述两式也称为屈服面方程。若将其改写成 $f' = 0$ 的形式，则称为屈服函数。屈服条件是指应力张量各分量的某种组合达到材料的某一临界值 c 时，材料就开始发生屈服现象。

以前，对于复杂应力状态下的屈服条件提出了很多的假说，如最大正应力条件、最大剪应力条件、最大弹性应变条件、歪形能条件、弹性总能量条件等，但比较起来，Tresca 提出的最大剪应力条件和 Von Mises 提出的歪形能条件更接近试验结果，数学形式也较简单。

2.4.3.2 根据屈服条件确定塑性区的形状大小

米泽斯 (Von Mises) 认为，当复杂应力状态的形状改变能密度等于单向拉压屈服时的形状改变能密度时，材料就开始屈服，其表达式为：

$$U_{\text{形}} = C$$

其中形状改变能密度为

$$U_{\text{形}} = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

• 疲劳、断裂与损伤 •

所以，Mises 屈服条件为：

$$\frac{1}{12G}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = C$$

因为上述条件适用于各种受力情况，所以对单向拉伸屈服，即 $\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 时，代入得

$$\frac{1}{12G}[\sigma_s^2 + \sigma_s^2] = C$$

即有

$$C = \frac{2\sigma_s^2}{12G}$$

再将它代回原式，即得 Mises 屈服条件

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (2.85)$$

或
$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s \quad (2.86)$$

显然，在主应力空间上，Mises 屈服面是圆柱体侧面，如图 2.13 所示。而在 $\sigma_1 - \sigma_2$ 平面（此时有 $\sigma_3 = 0$ ）上，则有

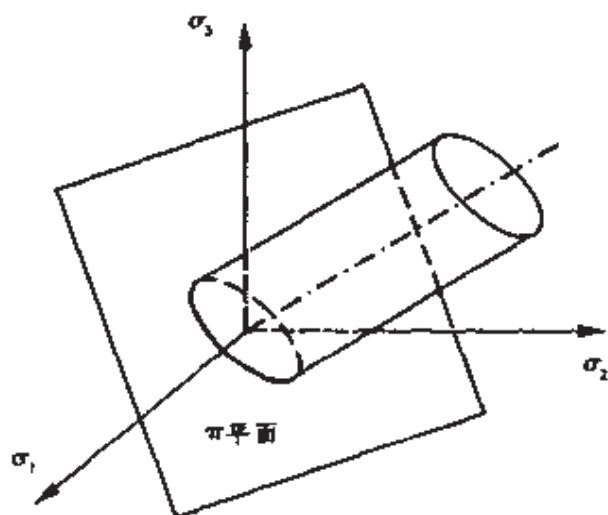


图 2.13

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 2\sigma_s^2$$

化简得

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2 \quad (2.87)$$

此式是一个椭圆方程，即由该式确定的屈服曲线是一条椭圆曲线。

而 Mises 屈服函数为：

$$f^* = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - \sigma_s = 0 \quad (2.88)$$

$$\text{或 } f^* = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_s^2 = 0 \quad (2.89)$$

对于平面问题，根据弹性力学知，主应力公式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_3 &= \begin{cases} 0 & \text{平面应力} \\ \mu(\sigma_1 + \sigma_2) & \text{平面应变} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

把张开型裂纹的应力公式 (2.54)，即

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \end{aligned}$$

代入式 (2.90) 有

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[1 \pm \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{3\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right] \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 \pm \sin \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (2.91)$$

对于平面应力（薄板或厚板表面），有 $\sigma_3 = 0$ 。

将式 (2.91) 代入式 (2.87) 解得

$$r = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + 3\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)\quad (2.92)$$

该式就是在平面应力下，I 型裂纹顶端屈服区域的边界方程，将其绘成曲线如图 2.14 所示（实线）。在 x 轴上（ $\theta=0$ ）的 r 值为：

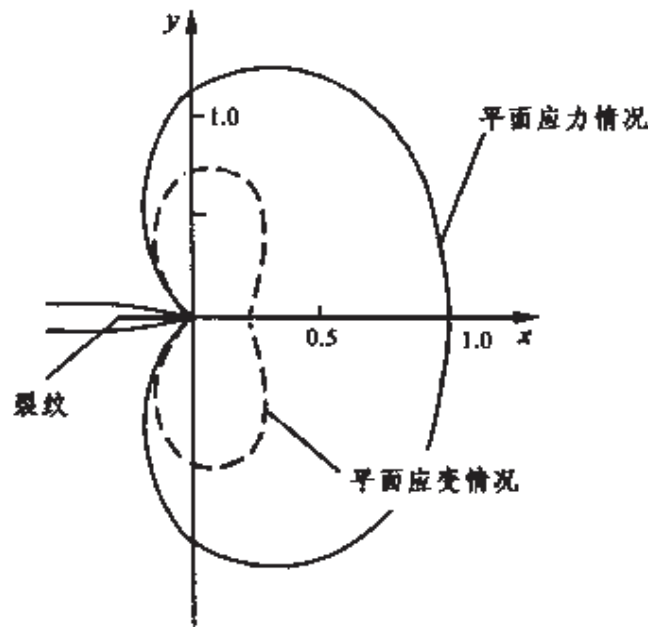


图 2.14

$$r_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{K_I^2}{\sigma_s^2}\quad (2.93)$$

对平面应变（厚板中心）

$$\sigma_3 = \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{K_I}{2\pi r} \cdot 2\mu \cos \frac{\theta}{2}$$

将上述主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 一起代入式 (2.85) 则

$$\left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \left\{ \left(2\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + \left[(1-2\mu) + \sin \frac{\theta}{2} \right]^2 + \left[(1-2\mu) - \sin \frac{\theta}{2} \right]^2 \right\} = 2\sigma_s^2$$

求解得

$$r^* = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[(1-2\mu)^2 + 3\sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.94)$$

这就是平面应变下，I型裂纹顶端屈服区的边界方程，在图 2.14 中如虚线所示（泊松比 $\mu=0.3$ ）。在 x 轴上（ $\theta=0$ ）的 r^* 值为

$$r_0^* = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \cdot (1-2\mu)^2 = 0.16 \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2.95)$$

Tresca 认为，在复杂的受力下，当最大剪应力等于材料单向拉伸屈服剪应力 τ_s 时，材料发生屈服，此时 $\tau_s = \sigma_s/2$ ，所得屈服区形状及基本结论和米泽斯判据基本是一致的。

比较图 2.14 中的实线和虚线可知，对于同一种材料，在平面应变下，裂纹顶端的屈服区远比平面应力下的要小，这是因为在平面应变下，由于沿板厚方向（ z 方向）存在第三向的拉应力 σ_3 ，在三向拉应力作用下，材料不容易发生屈服，即材料的有效屈服应力 σ_{ys} 比单向拉伸屈服应力 σ_s 要大，而在平面应

力条件下，有效屈服应力与单向拉伸屈服应力相等，即 $\sigma_{ys} = \sigma_s$ 。

2.4.3.3 考虑应力松弛时的塑性区长度

上面的讨论没有考虑屈服区内的材料由于发生塑性变形而引起的应力松弛效果，如果考虑这种效果后，屈服区还将进一步扩大。如图 2.15 所示，虚线 ADB 表示裂尖附近沿裂纹面上的应力 σ_y 随 r 变化的曲线，由此可见，在塑性区边缘点 D' 处 $\sigma_y = \sigma_{ys}$ ，由该点向裂纹顶端其应力是逐渐升高的，靠近裂纹顶端的应力达到理论上的极大值，这种情况与实际不相符。这是因为应力达到 σ_{ys} 以后，材料便会发生屈服，若不考虑加工硬化，虚线上的 AD 段将会下降至 CD 位置，即构件塑性区屈服极限 σ_{ys} ，为了维持内应力与所受外力的平衡，虚线 DB 段的应力水平将要相应的升高，其中有一部分要升至 σ_{ys} 。总之，按线弹性断裂力学计算出的应力的分布曲线 AB 将因为塑性区存在而实际变为实线 $CDEF$ ，这种现象称为应力松弛。

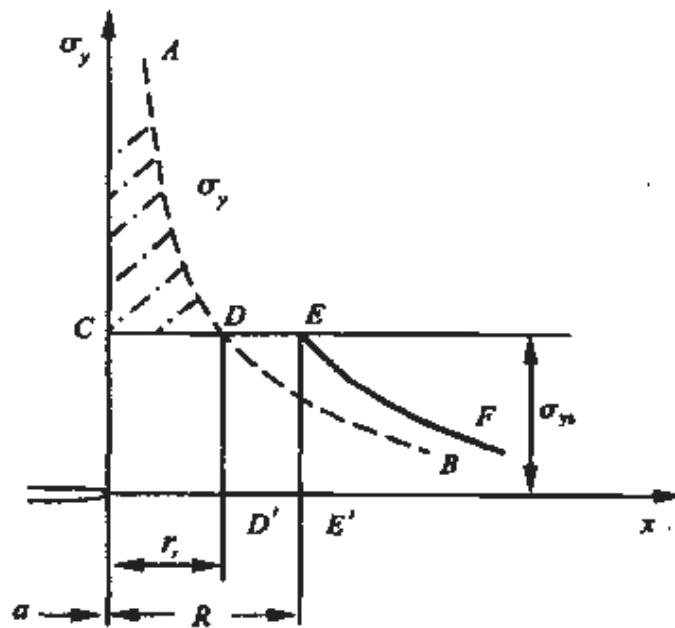


图 2.15

下面用粗略的估计法来确定考虑应力松弛后屈服区的宽度 R ：

在 x 轴上时，即 $\theta = 0$ ，由式 (2.54) 得

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

所以，根据平衡条件，有

$$\sigma_s R = \int_0^{r_0} \sigma_y dx = \int_0^{r_0} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx$$

其中 r_0 由式 (2.93) 确定，并将其代入上式，求解得

$$R = \frac{K_I^2}{\pi\sigma_s^2} \quad (2.96)$$

且有 $R = 2r_0$ ，这表明在平面应力情况，考虑屈服区内应力松弛后， x 轴上屈服区扩大了一倍。而较精确的解为 $R = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K_I^2}{\sigma_s^2}$ ，可见上述粗略估计的精确度是可以的。同理可得，对平面应变情况考虑屈服区内应力松弛后的塑性区宽度为

$$R = \frac{K_I^2}{2\sqrt{2}\pi\sigma_s^2} \quad (2.97)$$

在裂纹失稳扩展的临界状态， $K_I = K_{Ic}$ 。因而最大塑性区宽度为

$$R = \begin{cases} \frac{K_{Ic}^2}{\pi\sigma_s^2} & \text{平面应力} \\ \frac{K_{Ic}^2}{2\sqrt{2}\pi\sigma_s^2} & \text{平面应变} \end{cases} \quad (2.98)$$

2.4.3.4 有效裂纹长度

因为塑性区存在，裂纹顶端 σ_y 的应力分布不是线弹性断裂力学中计算出来的 AB 虚线，而是实线 $CDEF$ ，如图 2.15 所示。为了在工程中应用可以作以下修正，如图 2.16 所示，假设真实裂纹顶端 O 向右移动 r_y 至 O' ($OO' = r_y$)，以便在弹性范围内 (即 x 大于 R 范围)，根据线弹性断裂力学计算出的应力 $\sigma_y|_{x=0}$ 分布曲线 ($A'B'$ 虚线)，要与实际的应力分布曲线 ($CDEF$ 实线) 相接近。从而可以确定有效裂纹尺寸为：

$$a_{\text{有效}} = a + r_y \quad (2.99)$$

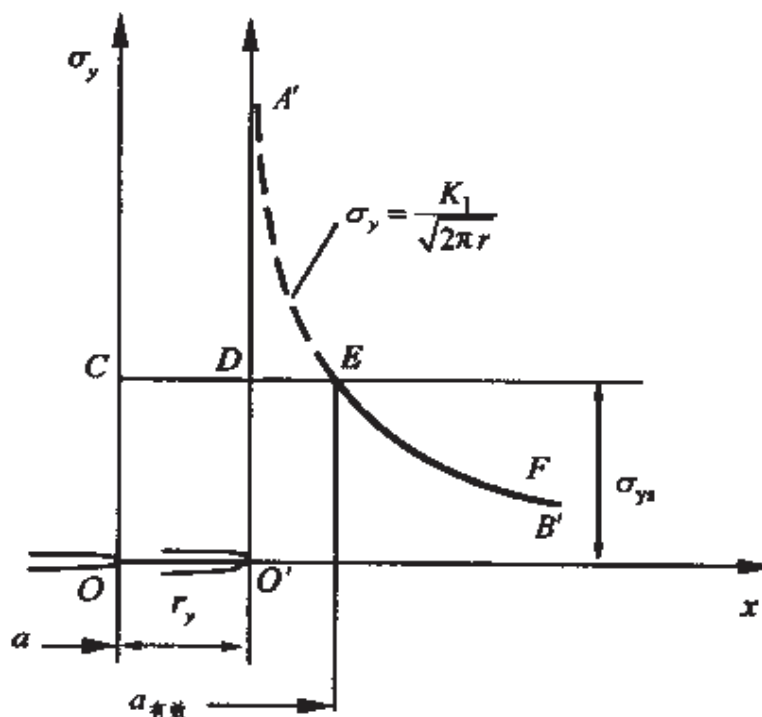


图 2.16

式中， a 是真实裂纹长度； r_y 是塑性区宽度 R 的一半。而在计算应力强度因子时，只要用有效裂纹长度 $a_{\text{有效}} = a + r_y$ 代替

真实裂纹长度 a 便可以。塑性区长度 r_p 的计算公式为

$$r_p = \begin{cases} \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} & \text{平面应力} \\ \frac{K_I^2}{4\sqrt{2}\pi\sigma_s^2} & \text{平面应变} \end{cases} \quad (2.100)$$

例如，对无限宽板中心贯穿裂纹，已知在线弹性条件下有

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$$

在小范围屈服条件下，引入有效裂纹长度概念，则有

$$K_I^* = \sigma\sqrt{\pi(a+r_p)}$$

如用 $r_p = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{K_I^*}{\sigma_s}\right)^2$ ，其中 $\alpha = \begin{cases} 2\pi & \text{平面应力} \\ 4\sqrt{2}\pi & \text{平面应变} \end{cases}$ ，代入上式，

得

$$K_I^{*2} = \sigma^2\pi\left(a + \frac{K_I^{*2}}{\alpha\sigma_s^2}\right)$$

则有

$$K_I^* = M_p \cdot \sigma\sqrt{\pi a} = M_p \cdot K_I$$

其中

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2}}$$

这表明在小范围屈服条件下的 K_I^* 比线弹性条件下的 K_I 有所增大, M_p 就是增大因子, 称为塑性区修正因子。这种有效裂纹模型的概念不仅适用以上讨论的情况, 对其他形状的裂纹体同样适用。在使用有效裂纹来处理塑性变形的问题时, 忽略了物体产生裂纹时弹性应变能的释放率与塑性区内塑性应变能之间的差别, 所以这种处理方式是粗略的。在小范围屈服时, 这种差别可以忽略不计。

2.5 平面应变断裂韧性 K_{Ic} 及测试原理

前面我们介绍了裂尖的应力强度因子 K 的计算及考虑小范围屈服的 K 的修正。不失一般性, 我们知道裂尖的应力强度因子可表示为 $K = \lim_{\xi \rightarrow 0} Z(\xi) \sqrt{2\pi\xi}$, 不同几何及载荷情况下的应力场仅表现在 K 的表达式不同。应力强度因子这个参量, 可作为判断裂纹是否进入失稳状态的一个指标。对于 I 型裂纹, 当 K_I 达到临界值即材料固有的抵抗脆性断裂的能力时, 裂纹发生失稳扩展, 即失稳扩展的临界条件是:

$$K_I = K_{Ic} \quad (2.101)$$

这就是应力强度因子断裂准则 (或称断裂判据), 这个准则是欧文 (G. R. Irwin) 于 1955 年提出的。式中 K_{Ic} 称为材料的断裂韧性 (或称临界应力强度因子), 可以由实验确定。它是与试验温度、模厚、变形速度等参量有关的数值, 一旦这些外部因素固定时, K_{Ic} 即为表示材料性质的常数。

2.5.1 K_{Ic} 的定义及典型试样的 K_I 表达式

根据理论分析和实验结果,张开型裂纹即 I 型最容易产生脆断。对张开型来说,在平面应变情况下,由于材料处于三向拉伸状态,在裂纹尖端 $\sigma_x = \sigma_y$, $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$, 比平面应力情况 ($\sigma_z \approx 0$) 容易产生扩展。另外, K_I 随厚度而变,厚度较大时, K_I 趋向于稳定的低值,所以通常用 I 型裂纹厚板进行实验,以确定平面应变状态下应力强度因子的临界值 K_{Ic} 。从工程角度来看,这样做会偏于安全(或保守),即平面应变条件下材料更容易脆断。

2.5.1.1 K_{Ic} 的定义

断裂韧性(或断裂韧度) K_{Ic} 是指在线弹性介质中,具有 I 型裂纹的构件抵抗裂纹扩展的能力,即 I 型裂纹尖端区域应力强度因子的临界值。当实际构件中裂纹尖端附近区域应力强度因子达到此临界值,即 $K_I = K_{Ic}$ 时,裂纹失稳扩展,发生脆性断裂。所以,断裂韧性是判断裂纹是否失稳的一个指标。工程上一般以平面应变断裂韧性 K_{Ic} 作为设计依据。

实验和分析研究表明:在一定的条件下, K_{Ic} 是材料固有的性能指标,是抵抗裂纹扩展能力的标志,是材料的常数,它和外力以及裂纹几何形状无关。随着断裂力学的发展和推广应用, K_{Ic} 已逐渐和已有的常规机械性能指标一样作为材料的性能指标之一。

应特别注意,应力强度因子 K_I 和材料的临界应力强度因子即断裂韧性 K_{Ic} 是两个不同的概念。前者是由外载荷引起的反映力学效应(即裂纹尖端邻域应力场强弱)的一个参量,后者是反映材料性能的一个参量,由实验确定。另外, K_{Ic} 作

• 疲劳、断裂与损伤 •

为断裂韧性指标是有条件的：

(1) K_{Ic} 只适用于线弹性介质，也可近似地适用于小范围屈服的介质中，但不适用于大范围的屈服情况，因为这时已不是弹性应力场。

(2) 测试 K_{Ic} 必须保证试件处于平面应变状态下，而不能处于平面应力状态下。因为平面应变状态下，裂纹尖端附近处于三向拉应力状态，材料变脆，比平面应力处于两向应力状态，裂纹容易扩展。因此平面应变的断裂韧性值为最低值，我们以此作为指标，就可以保证无论在平面应力或平面应变状态下的实际构件都是在安全的范围内工作。

2.5.1.2 典型试样的 K_I 表达式

理论分析和实验表明： K_I 正比于施加于试件上的载荷且与试件及裂纹的几何形状和尺寸有关。

1. 直三点弯曲试样（见图 2.17）

$$K_I = \frac{Pl}{BW^{3/2}} f_1\left(\frac{a}{W}\right) \quad (2.102)$$

其中

$$f_1\left(\frac{a}{W}\right) = 2.9\left(\frac{a}{W}\right)^{1/2} - 4.6\left(\frac{a}{W}\right)^{3/2} + 21.8\left(\frac{a}{W}\right)^{5/2} - 37.6\left(\frac{a}{W}\right)^{7/2} + 38.7\left(\frac{a}{W}\right)^{9/2} \quad (2.103)$$

式 (2.102) 已列入由美国材料实验学会 ASTM 制定的美国 E399—74 标准，通过实验测出临界时的外载 P ，将此时的 P 代入式 (2.102) 即得断裂韧性 K_{Ic} 。裂纹长度 a 是由三角切口加上人工引发的部分疲劳裂纹长度组成（见图 2.17）。图中尺寸关系为 $l = 4W, B = W/2, \phi = 0.25W$ 。

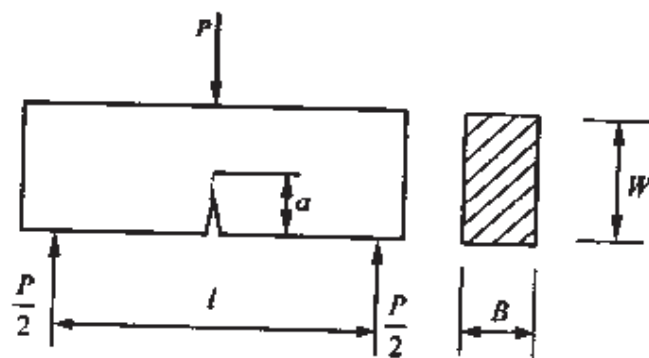


图 2.17

2. 紧凑拉伸试件 (见图 2.18)

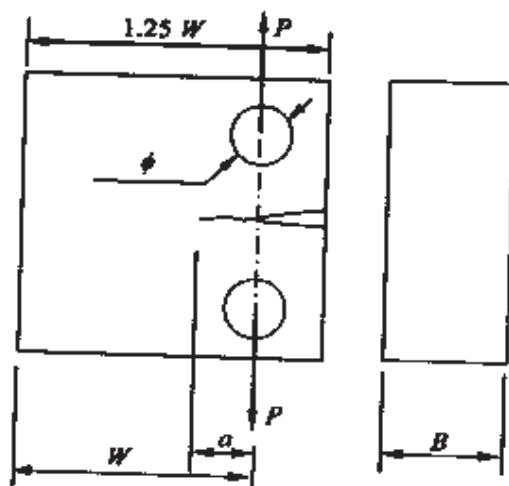


图 2.18

$$K_I = \frac{P}{BW^{3/2}} f_2 \left(\frac{a}{W} \right) \quad (2.104)$$

其中

$$f_2 \left(\frac{a}{W} \right) = 29.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 185.5 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 655.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 1017.0 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 638.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \quad (2.105)$$

• 疲劳、断裂与损伤 •

以上为最常用的二种试样。此外还有很多其他的试件，如四点线弯曲试件、拱形三点弯曲试件、单口切边拉伸试件、圆周切口杆拉伸试件等，如图 2.19 所示。

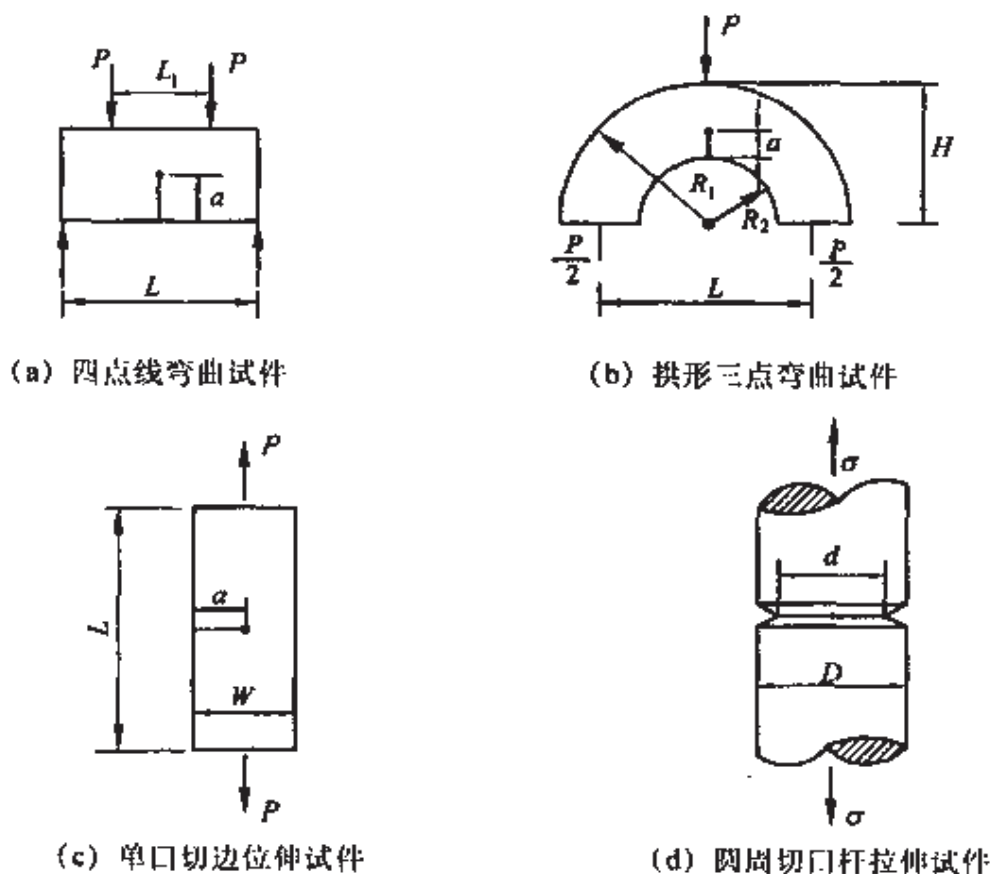


图 2.19

2.5.2 K_{Ic} 的测试原理

2.5.2.1 测试原理

测试材料 K_{Ic} 的基本原理是将材料制成带有裂纹的试件，加载至断裂，记录载荷 P 及裂纹张开位移 V ，得到 $P-V$ 曲线图，按一定规则确定试件断裂时的载荷，代入该试件

应力强度因子公式，即可求出该材料的 K_{Ic} 值。由于裂尖的应力强度因子 K_{Ic} 不仅和载荷有关，而且与试件的几何形状、尺寸等因素直接有关，因此在测试试验中，对试件的尺寸、试验装置、试验方法等都是一些明确的规定和要求。

2.5.2.2 试验装置的特点

由前面各种试件的裂尖应力强度因子 K_I 表达式可以看出，断裂韧性 K_{Ic} 取决于裂纹扩展时的载荷 P_Q 及试件和裂纹的几何形状、尺寸。一般说来，裂纹扩展载荷并不是试件断裂的最大载荷 P_{max} ，这是因为试样厚度是有限值，不能保证裂纹尖端都是处于平面应变状态。所以试样的 P_Q 不能简单地直接由试验机上读得。在材料试验机上测定平面应变断裂韧性时和一般的材料拉伸试验相比较有以下显著的特点：

(1) 必须装设专门的测力计和引伸计，分别将每一瞬时的载荷 P 和切口张开位移 V 转变为电讯号连续输出，并通过电阻应变仪送入函数记录仪自动记录。

(2) 一般拉伸试验用的是光滑试件，而在平面应变断裂韧性测试时，必须采用有切口及预制疲劳裂纹的试件，以模拟实际构件中的裂纹。

(3) 一般拉伸试验中，记录的是载荷-伸长 ($P-\Delta l$) 曲线，当材料有明显的屈服阶段时，可从 $P-\Delta l$ 图上直接读出屈服极限和强度极限[见图 2.20 (a)]；如材料无明显屈服区时，则可找出名义屈服极限及强度极限，名义屈服极限是以试件相对残余变形为 0.2% 时的载荷 $P_{0.2}$ 来计算的屈服极限（见图 2.20 (b)）。而在断裂韧性测试中，记录的都是载荷-张开位移 ($P-V$) 曲线[见图 2.20 (c)]。从图中求出裂纹临界扩展

的载荷，测定裂纹长度 a 及试件几何尺寸，代入求 K_I 的表达式求出 K_{Ic} 或名义断裂韧性值 K_Q 。

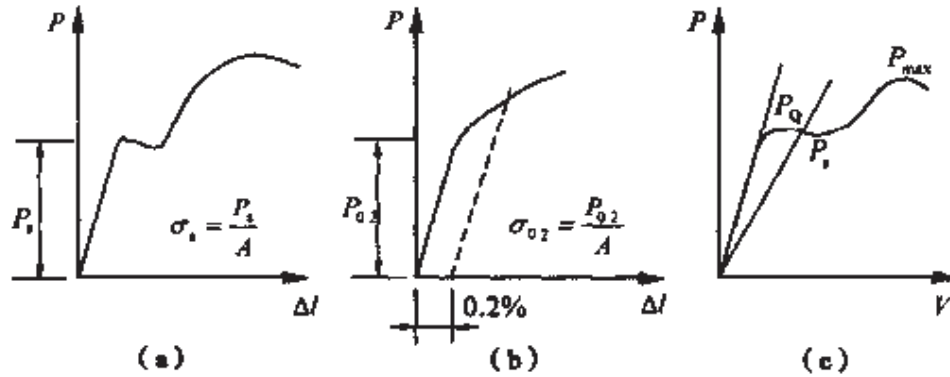


图 2.20

(4) 一般拉伸试验如操作正确，一次就能得出试验结果。但断裂韧性测试由于必须使试件处于平面应变状态，而试件的应力状态又决定于其尺寸，开始确定的试件尺寸只是大体估计的，实际上试件是否真的处于平面应变状态，要试验完毕后根据 $P-V$ 曲线及断口特征才能判定。所以，有时可能要多次改变试件尺寸，才能得出 K_{Ic} ；有时可能由于试验条件的限制，甚至得不到有效的 K_{Ic} 。

如果用一般的材料试验机测试断裂韧性时，还必须配备测力计、引伸计、函数记录仪、线切割机和疲劳试验机等设备。

2.5.2.3 测试方法（以紧凑拉伸试样为例）

1. 取样和标记

因为材料一般都是各向异性的，故材料的断裂韧性 K_{Ic} 和材料中裂纹的取向及传播方向有关，即 K_{Ic} 值和试件取样方式及开裂方向有关，所以必须标出裂纹的取向。一般用两

个字母表示裂纹的取向,第一个字母表示裂纹面的法线方向,第二个字母表示裂纹的扩展方向。

从实际构件中取样时,要注意构件的工作状态和应力分布,以确定构件中最危险的裂纹取向。试件中的裂纹取向应当和实际的危险裂纹的取向相同,这样测得的 K_{Ic} 才能更符合实际情况。

2. 尺寸的确定

确定试件尺寸的基本要求是保证试件裂纹端部沿板厚方向大部分都处于平面应变状态,保证裂纹尖端附近的塑性区很小,使试件内部保持非常大的弹性区域,只有这样,才能得到真正意义的线弹性介质中平面应变的断裂韧性。

3. 预制裂纹(见图 2.21)

先用线切割机预制一个切口,其长度为 a_0 ,然后用疲劳试验机加载引发一个微裂纹 Δa ,所以,预制裂纹总长度为

$$a = a_0 + \Delta a \quad (2.106)$$

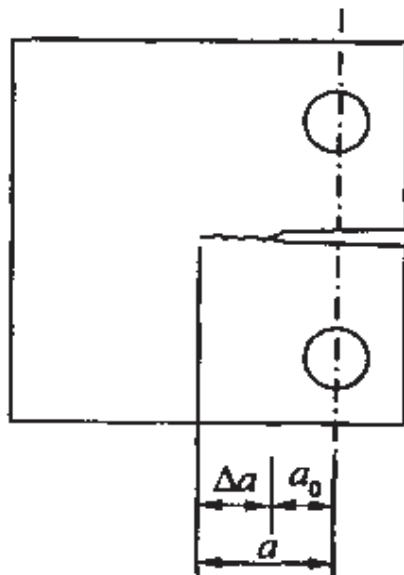


图 2.21

4. 测示装置示意图

为了记录 P - V 曲线, 将测力计、引伸计、应变仪、函数记录仪和材料试验机等设备按图示连接, 如图 2.22 所示, 记录下所加载荷 P 与裂纹张开位移 V 。应注意引伸计要标定在线性范围内工作。

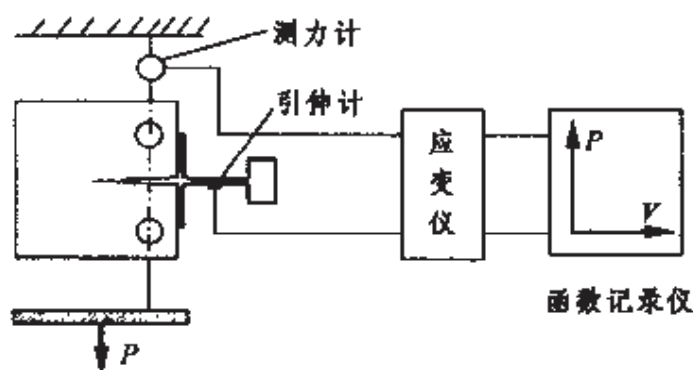


图 2.22

2.5.3 P - V 曲线分析

2.5.3.1 裂纹长度 a 确定

试样断裂后一般用工具显微镜首先测定五个读数 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 后取中间三个读数的平均值 (见图 2.23), 即

$$\bar{a} = \frac{1}{3}(a_2 + a_3 + a_4) \quad (2.107)$$

注意: a_2 、 a_3 、 a_4 中最大裂纹长度与最小裂纹长度之差应不大于 $2.5\%W$ 。同时, 任一处的疲劳裂纹长度不小于 $2.5\%W$, 且不得小于 1.5 mm 。此外, 还要求表面裂纹长度 a_1 、 a_5 应不小于 $90\% \bar{a}$, 否则试验无效。

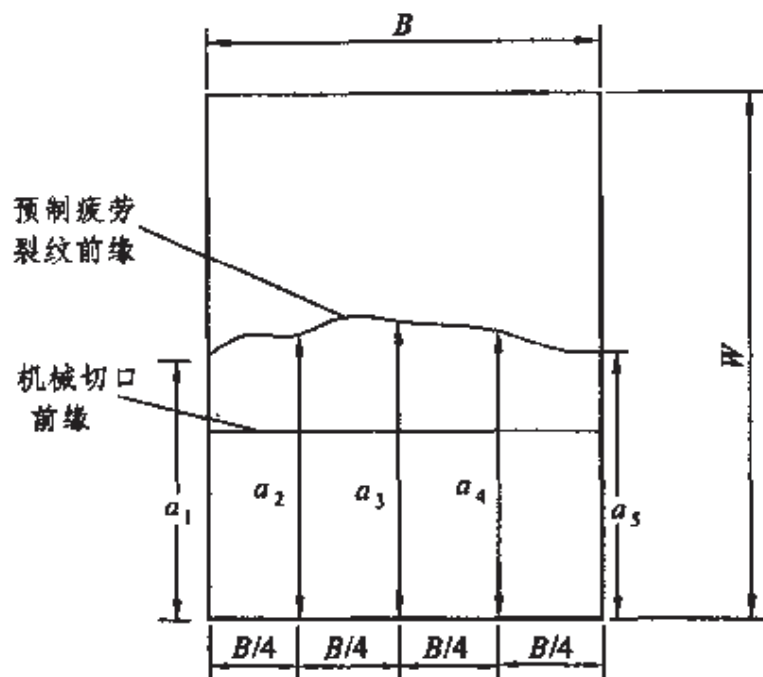


图 2.23

2.5.3.2 裂纹临界扩展载荷 P_Q 确定

1. 三种试验曲线

由上述知,平板试件两个表面上裂纹尖端处于平面应力状态,而在板厚的中心部分,则处于平面应变状态。因此裂纹尖端的塑性区大小沿着板厚方向发生变化,它影响着裂纹扩展过程、断面特征及断裂韧性数值。因而,对同一材料因试件厚度不同,可能得到三种不同的试验曲线,如图 2.24 所示。

(1) 试件厚度足够大,接近理想平面应变状态,裂尖无明显塑性变形,断口平整,如图 2.24 (a) 所示,此时, $P_Q = P_{max}$, 此类情况可不测裂纹张开位移 V , 直接由实测 P_{max} 代入 K_I 公式,即可求得 K_{Ic} 。但要得到这种曲线,试件必须做得很厚,不仅试件的制作困难,而且也受到试验机能力的限制。

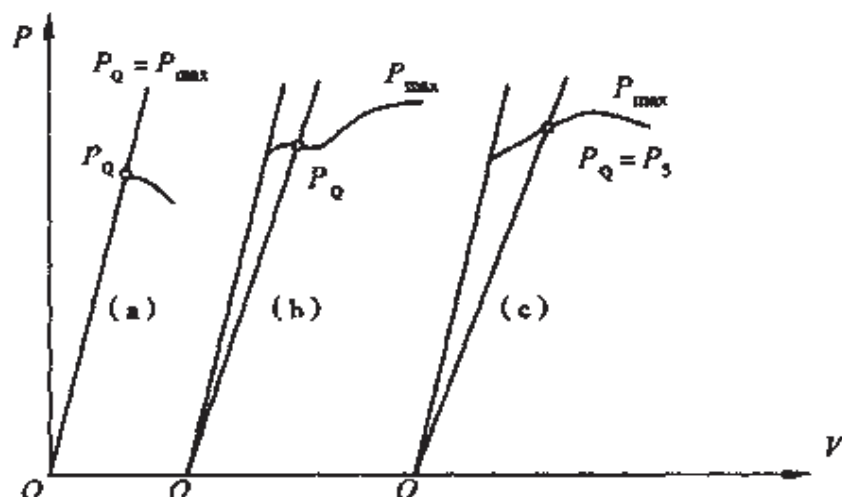


图 2.24

(2) 试件有一定厚度，裂尖中部处于平面应变状态，裂尖在试件两侧表面一定深度内仍处于平面应力状态，在试验过程中有一定的塑性变形，当 P 增至 P_Q 时，裂尖中间部位产生临界扩展，发出清脆的声音。此时 $P_Q = P_b$ ，如果表面也是平面应变状态则试件会马上断裂。由于表面处于平面应力状态下，塑性较好，屈服区较大，所以只有变形而不断裂。正是由于表层拖住了板材中心部位的材料脆性断裂的扩展，因而使裂纹的扩展受到阻碍，在 $P-V$ 曲线上可以看到称为“迸发”的亚临界扩展平台。随着载荷不断增加，断裂从中心部位向表层扩展，直至断裂，此时 $P_Q = P_{max}$ 。显然，如果用 P_{max} 来表征裂纹临界扩展载荷，则并不代表理想的平面应变状态下的断裂韧性，因为表层有一部分处于平面应力状态阻碍了裂纹的清脆扩展；用 P_{max} 表征临界载荷，则得出的 K_{Ic} 实际上是平面应变及平面应力“混合状态”下的断裂韧性，此值必高于真实的 K_{Ic} 。大量试验表明：如果这时用听到清脆声时的载荷来计算 K_I 值，其值就等于前一种试件所测定的平面应变断裂韧性 K_{Ic} 。一般发生清脆响声时的载荷

称为“迸发载荷 P_b ”。按迸发载荷确定断裂韧性所需要的试件厚度较小，裂纹尖端在试样两侧有一定的塑性变形，使 $P_Q < P_{max}$ 。

(3) 试件较薄，裂纹尖端基本处于平面应力状态，裂纹断口有一定的颈缩现象，材料无明显的平台，不发生清脆的响声，如图 2.24 (c) 所示，在达到最大载荷前，裂纹已经有亚临界扩展，此时作斜率低 5% 的割线 OP_5 ，与试验曲线交于 P_5 ，则取 $P_Q = P_5$ ， OP_5 直线与 $P-V$ 曲线的交点 P_5 就是裂纹相对扩展 $\Delta a/a = 0.2\%$ 的点。

一般不论那种情况，按照 E399—74 的规定，均在试验记录图上作一条割线，其斜率应较记录图上初始部分的切线斜率低 5%，由此可得此割线和记录曲线的交点 P_5 ，即得临界扩展载荷 $P_Q = P_5$ 。

2. K_Q 的有效性判断

计算的 K_Q 值是否是材料的平面应变断裂韧性 K_{Ic} ，还必须进行有效性判断。按规定只有满足以下两个条件时，所得的 K_Q 才是有效的：

$$\frac{P_{max}}{P_Q} \leq 1.1 \quad (2.108)$$

$$\left(\frac{K_Q}{\sigma_t} \right)^2 \leq \frac{B}{2.5} \quad (2.109)$$

如果不满足其中的任何一条，则应选厚度是原试件厚度 1.5 倍的试件再进行试验，一直到满足上面两个条件为止，否则平面应变条件不满足。其中 B 是试样厚度。

另外， P_{max} 与 P_Q 愈接近，说明平面应力影响愈小。但在平面应力的情况下，应考虑应力松弛后的塑性区修正，裂纹

(有效裂纹) 尖端前的塑性区长度为

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2.110)$$

此时, 只要用有效裂纹长度 $a_{\text{eff}} = a_0 + r_p$ 代替真实裂纹长度 a_0 便可以了。若 $B \geq 2.5 \left(\frac{K_0}{\sigma_s} \right)^2$, 即 $B \geq 5\pi r_p = 15.7r_p$ 时, 说明塑性区较小, 计算时可以忽略不计。具体测试还有很多技术细节, 在这里就不作详细的介绍了, 读者可以参考有关测试标准。

2.6 裂纹张开位移 (COD) 原理和方法

前面所叙述的线弹性断裂力学是把材料当作完全弹性体, 运用弹性力学的理论方法研究裂纹的开裂和扩展规律, 从而提出裂纹临界扩展的判据。这种利用应力的观点讨论裂纹失稳扩展, 无论在理论上或工程应用方面都得到了满意的结论。不仅如此, 即使在裂纹尖端附近存在着塑性区 (这种塑性区由于裂纹尖端的高度应力集中, 总是要存在的), 如果这个塑性区的尺寸和裂纹尺寸相比小得多, 即所谓小范围屈服, 这时微小的塑性区被广大的弹性区包围, 应力强度因子 K 仍可近似地表示应力应变场的强度, 仍可用应力强度因子断裂判据估算裂纹的扩展。但若材料是弹塑性体, 当它受力后, 其裂尖区产生大范围的屈服, 此时变形发展较快而应力上升较慢, 应力-应变关系不成线性关系, 线弹性断裂力学显然不太适用, 此时有关材料的特性指标若采用变形或位移就比用应力更方便、更合适。

因为弹塑性断裂力学的重要性，所以国内外学者在这方面做了很多工作，也取得了很多成就，目前较为流行的主要理论有： J 积分、COD法、阻力曲线等。

2.6.1 简 述

大多数工程材料由于其韧性较高（低温或厚截面情况除外），这类材料受力构件的裂纹尖端存在着较大的塑性变形，尤其是在应力集中区以及焊接引起的残余应力区发生全面屈服，属于弹性塑性破坏。此时的塑性区尺寸已接近或超过裂纹尺寸，如采用上述的塑性区修正已无意义，线弹性断裂力学的理论不适用，必须应用弹塑性断裂力学进行研究。

如一般的中低强度钢，除了温度很低、截面很厚、应变速率高的特殊情况，由于构件尺寸小，塑性区尺寸相对地就较大，在裂纹尖端附近就会发生大范围或全面屈服，一般都属于弹塑性断裂，这时再也不能用 $K_I = K_{Ic}$ 作为断裂判据了。即使是大截面中低强度钢（如大型电机转子等大锻件），要测试平面应变断裂韧性 K_{Ic} ，按 $B \geq 2.5 \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$ 的要求，厚度 B 都是很大的（有时要 10 cm 以上），这样测试 K_{Ic} 是很不经济的，也要采用弹塑性断裂力学理论来换算 K_{Ic} 。

2.6.2 COD 原理和 D-M 模型

威尔斯（Wells）根据裂纹尖端附近产生大范围屈服时，在裂纹尖端出现钝化、裂纹侧面随着外载增加逐渐张开的现

象，提出是否可用裂纹尖端的张开位移作为判断裂纹是否失稳扩展的依据。所谓张开位移，是指裂纹体受外载后，在裂纹的尖端沿垂直于裂纹的方向所产生的位移（Crack Opening Displacement），简称 COD，一般用 δ 表示。在裂纹失稳扩展的临界状态下，临界的 COD 用 δ_c 表示。 δ_c 也是材料的断裂韧性，是通过实验测定的材料常数。

裂纹张开位移原理的基本思想是：把裂纹体受力后裂纹尖端的张开位移 δ 作为一个参量，而把裂纹失稳扩展时的临界张开位移 δ_c 作为材料的断裂韧性指标，用 $\delta = \delta_c$ 这个判据来确定材料在发生大范围屈服断裂时构件工作应力和裂纹尺寸间的关系。这一方法称为裂纹尖端张开位移法，简称 COD 法或 δ 法。

在 COD 法中，COD 虽然缺乏严格的定义，又不是较为严密的应力、应变场参数，但 COD 法较为直观，应用简单，又有临界张开位移 δ_c 较易测定等优点，因此在工程上得到广泛的应用，其缺点是裂尖张开位移 δ 的计算较难。

下面介绍一种比较权威的 COD 分析方法即道格达尔模型（Dugdale-Model），简称 D-M 模型。

该模型是道格达尔（Dugdale）1960 年在用穆斯海里什维利（Muskhelishvili）方法对带有穿透裂纹的薄板进行拉伸试验时，发现裂纹尖端的塑性区具有扁平带状特征，从而提出了所谓 D-M 模型，以处理具有穿透裂纹的无限宽板的弹塑性问题。

如图 2.25 所示，D-M 模型的假定是：

- （1）穿透裂纹的无限大薄板，受单向拉应力作用。
- （2）裂尖塑性区长度 R 呈尖劈形或称扁平带状，故 D-M 也称为带状屈服模型，而实际上是鱼状的。

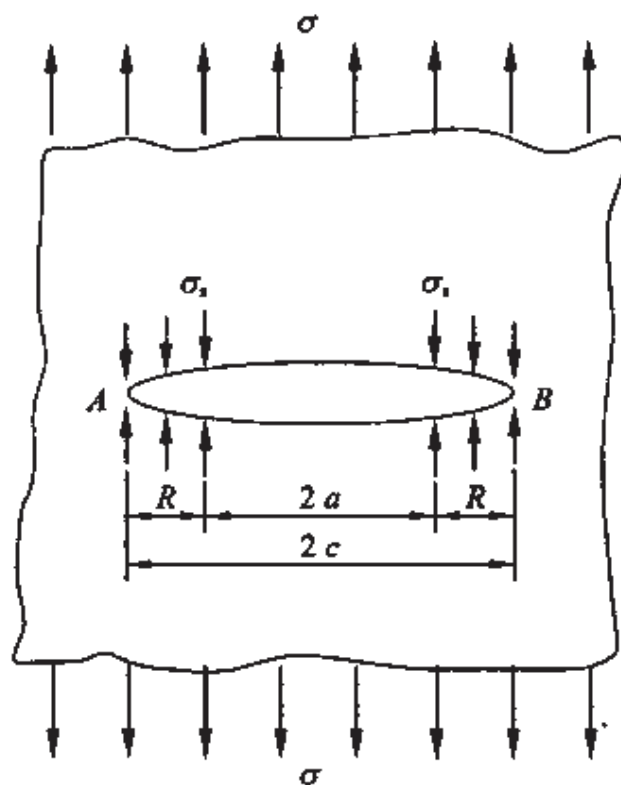


图 2.25

(3) 在塑性区内受均匀分布应力 σ_1 的作用，没有考虑材料的硬化问题。

(4) 塑性区的端点应力 (A 、 B 处) 无奇异性，即应力是有限值，也就是在端点的应力强度因子为零。

(5) 在塑性区外，材料仍处于弹性状态。

上述假设的 D-M 模型，相当于把裂纹长度由原来的 $2a$ 扩展到 $2a + 2R$ ，而在 $2a + 2R$ 以外，材料仍处于弹性状态。这样，就把平面应力条件下的弹塑性裂纹问题，转化为求解在远场应力 σ 和带状区内应力 σ_1 作用下，具有 $2a + 2R = 2c$ 长度裂纹的线弹性断裂力学问题，这是一个“弹性化”的过程。利用这个 D-M 模型可以解决两个问题：

(1) 塑性区尺寸。

$$R = c - a = a \left(\frac{c}{a} - 1 \right) = a \left(\sec \frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} - 1 \right) = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_1}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2.111)$$

其推导见后面的分析。

(2) 裂纹张开位移 COD。

$$\delta = \frac{8\sigma_s a}{\pi E} \ln \sec \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right) \quad (2.112)$$

该公式的推导过程可参考有关书籍。

B 点 (或 A 点) 的应力强度因子 K_1 由两部分组成 (见图 2.26): 一是远场均匀拉应力 σ 引起的 K_1^o , 其值由线弹性断裂力学已知为 $K_1^o = \sigma \sqrt{\pi c}$; 另一是由塑性区的裂纹表面所受的均匀应力 σ_s 引起的 K_1^s , 其值由下面的推导得出。

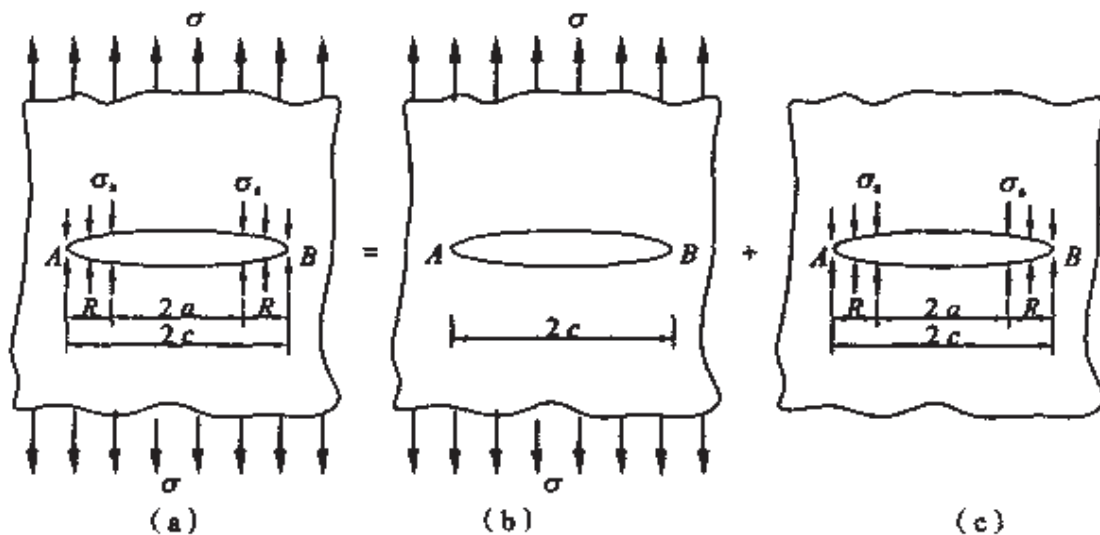


图 2.26

前面我们已知如图 2.27 所示的应力强度因子为

$$K_1 = \frac{2P\sqrt{a}}{\sqrt{\pi(a^2 - b^2)}} \quad (2.113)$$

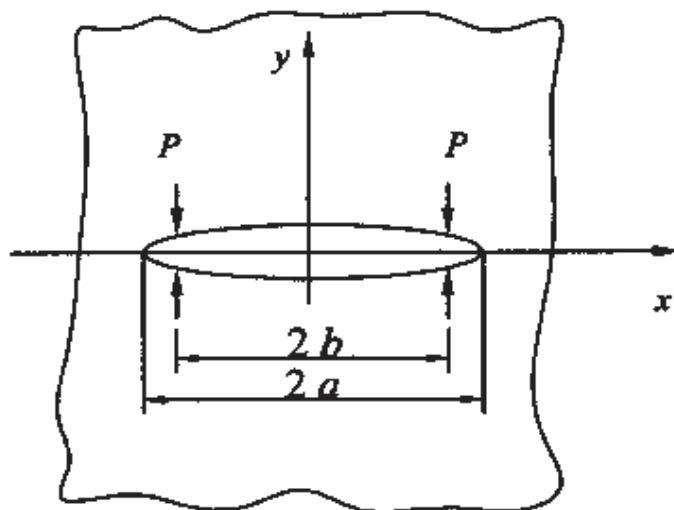


图 2.27

对图 2.26 (c) 所示情况, 取 $P = \sigma_1 dx$ 代入式 (2.113), 再积分, 可得

$$K_1^{\sigma_1} = \int dx dK_1 = \int \frac{-2\sigma_1 dx \sqrt{c}}{\sqrt{\pi} \sqrt{c^2 - x^2}} = -\frac{2\sigma_1 \sqrt{\pi c}}{\pi} \cdot \cos^{-1} \left(\frac{a}{c} \right) \quad (2.114)$$

根据迭加原理, 可得 B 点 (或 A 点) 的应力强度因子 K_1 为

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1^{\sigma} + K_1^{\sigma_1} \\ &= \sigma \sqrt{\pi c} - \frac{2\sigma_1}{\pi} \sqrt{\pi c} \cos^{-1} \left(\frac{a}{c} \right) \end{aligned} \quad (2.115)$$

因为塑性区端点 A 和 B 应力无奇异性, 要求满足 $K_1 = 0$, 则有

$$\sigma \sqrt{\pi c} - \frac{2\sigma_1}{\pi} \sqrt{\pi c} \cos^{-1} \left(\frac{a}{c} \right) = 0$$

即有

• 疲劳、断裂与损伤 •

$$\frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right) \quad (2.116)$$

又塑性区尺寸 $R = c - a$ ，将式 (2.116) 代入则得

$$R = a \left(\sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} - 1 \right) \quad (2.117)$$

为了和 2.4.3 小节的塑性区修正方法得到的塑性区宽度进行比较，再把上式变换一下形式，可将 $\sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}$ 用级数展开，即

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \dots$$

当 σ/σ_s 较小时，可忽略 x^4 项及以上各项，则

$$R = \frac{1}{2}a \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} \right)^2 \quad (2.118)$$

又因为弹性范围的裂尖应力强度因子为 $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ ，得

$$a = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma} \right)^2$$

将该式代入式 (2.118) 得

$$R = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2.119)$$

和 2.4.3 小节求得的在考虑应力松弛的情况下平面应力的塑性区宽度

$$R = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$$

相比较，D-M 模型所得的塑性区宽度要大一些。

在 D-M 模型中因为消除了应力奇异点，屈服区较大，所以已不存在由应力强度因子描述的弹性应力场，而是采用裂尖张开位移 δ 参量来描述裂纹失稳扩展。这样就可以避开因为中低强度钢裂尖存在大塑性区内本构关系的复杂性引起的无法解决其断裂判据的困难。

Goodier 利用 Mushelishvili 的结果解出 D-M 模型中 $x = \pm a$ 处的裂纹张开位移公式

$$\delta = \frac{8\sigma_s a}{\pi E} \ln \sec \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} \right)$$

此式建立了外加应力 σ 、材料屈服极限 σ_s 、裂纹真实长度(不包括塑性区 R) 和裂尖张开位移 δ 的定量关系，它是 COD 方法的基本关系式。从公式可知 σ/σ_s 接近 1 的大范围屈服条件下， δ 对应力或 σ/σ_s 比值的变化非常敏感，因此用 δ 描述大范围屈服条件下裂尖的形变状态是适当的，以此建立的断裂判据可用于工程实际。根据计算和实验结果，当处于 $\sigma/\sigma_s \leq 0.6$ 的较低应力水平时，按上式计算可以得到令人满意的结果。而高应力水平 $\sigma/\sigma_s > 0.6$ 时，在某些情况下，其误差就较大。如当 $\sigma/\sigma_s = 1$ 时，按上式计算出 $\delta \rightarrow \infty$ ，即说明 D-M 模型不适用于整体屈服的情况，其主要原因是因为公式中忽略了塑性区材料的硬化问题。用有限元计算结果表明，在小范围屈服和大范围屈服条件下，D-M 模型的预测是足够精确的。在工程上，对于大范围屈服一般采用从实验数据中归纳得到的 COD 全面屈服公式

$$\delta = 2\pi e a \quad (2.120)$$

式中 $e = \sigma/E$ 为裂纹周围的平均应变（或称为名义应变、标称应变）。

2.7 J 积分原理

裂纹张开位移法在中低强度钢的设计和选材中广泛应用的实践证明，它是一种简单而有效的断裂判据，但它并不是一个直接而严密的裂纹尖端弹塑性应力应变场参量。同时，判据 $\delta = \delta_c$ 只有在 δ 是起裂时的 COD 才有效，而起裂点和裂纹失稳扩展对于弹塑性材料是不一样的，这中间要经过一个亚临界扩展后才达到失稳点。因而 COD 判据不能用来预测起裂后亚临界扩展和最后失稳扩展的规律性。而作为应力应变场参量的 J 积分却可以解决这一问题。 J 积分是理论上较严密的应力应变场参量，它在测定和理论分析中能避免裂纹尖端连续介质力学已不适用的地区，试验测定简单可靠，理论计算有较满意的精度，因而它是弹塑性断裂力学很有发展前途的方法。

2.7.1 J 积分定义

对于裂纹尖端弹塑性应力应变场，要想在数学上精确地求解是有相当大的困难的。1968 年赖斯 (J. R. Rice) 为了避开求解裂纹尖端应力应变场这一难点，提出了一个围绕裂纹尖端的围线积分，这个积分值与积分路径无关，为一常数，

并认为这一常数的数值能定量地反映裂纹尖端弹塑性应力应变场的强弱。

J 积分定义：如图 2.28 所示，在均质薄板上有一穿透裂纹，受二向应力作用，围绕裂纹尖端 O 作一回路线积分

$$J = \int_{\Gamma} w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (2.121)$$

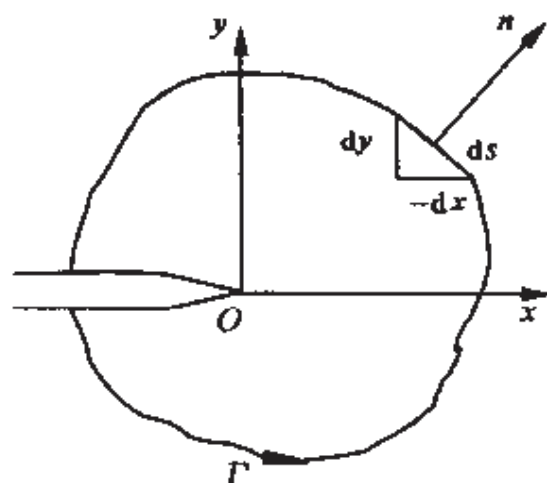


图 2.28

则此积分定义为 J 积分，或称为 Rice 积分，式中 Γ 是由裂纹下表面的任意一点开始，沿逆时针方向绕过裂纹尖端而终止于裂纹上表面任意一点的任意一条曲线； T_i 是作用在积分回路弧线元 ds 上沿外法线方向的张力矢量； u_i 是该处的位移矢量。 w 是在弹塑性条件下，在单调加载过程中裂纹体的应变能密度，根据塑性形变理论有

$$w(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \sigma_y d\epsilon_y \quad (2.122)$$

式中 σ_y 、 ϵ_y ($i, j = x, y$) 分别为裂纹尖端附近应力分量 and 应变分量的约写，又分别称为应力张量和应变张量。

2.7.2 J 积分的守恒性证明

J 积分的数值与积分路径无关, 称为 J 积分的守恒性, 现证明之。

绕裂纹尖端 O 作一条封闭曲线 Γ^* , 且将它分成四段, 即

$$\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$$

如图 2.29 所示。因为 Γ_2 、 Γ_4 为裂纹表面 (自由表面), 其上无外力作用, 即 $T_i = 0$, 并且由于是沿 x 轴方向, 即 $dy = 0$, 所以有

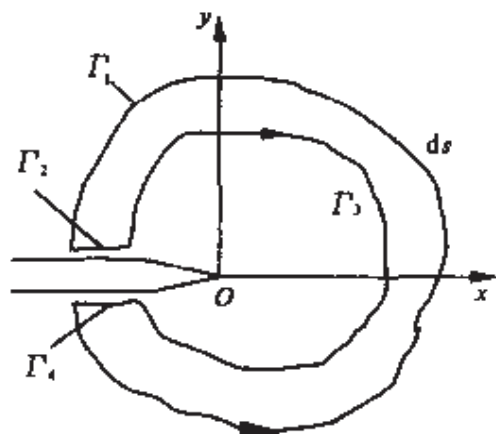


图 2.29

$$\int_{\Gamma_2} w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dx = \int_{\Gamma_4} w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dx = 0 \quad (2.123)$$

利用弹性力学, 可得 ds 处边界条件为

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} n &= T_x \\ \tau_{xy} l + \sigma_y n &= T_y \end{aligned} \quad (2.124)$$

其中 $l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$, $n = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$ 。 T_x , T_y 分别为沿 x 、

y 方向作用在积分回路弧线元 ds 上的张力分量。

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds &= \oint_{\Gamma} \left(T_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + T_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) ds \\ &= \oint_{\Gamma} \left[\left(\sigma_x l \frac{\partial u_x}{\partial x} ds + \tau_{xy} n \frac{\partial u_x}{\partial x} ds \right) + \left(\tau_{xy} l \frac{\partial u_y}{\partial x} ds + \sigma_y n \frac{\partial u_y}{\partial x} ds \right) \right] \\ &= \oint_{\Gamma} \left[\left(\sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dy - \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) + \left(\tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} dy - \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) \right] \\ &= \oint_{\Gamma} \left[\left(\sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dy - \left(\tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dx \right] \end{aligned}$$

利用格林公式

$$\oint_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

并令

$$\begin{aligned} Q &= \sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ P &= - \left(\tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds &= \oint_{\Gamma} \left[\left(\sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dy - \left(\tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dx \right] \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \tau_{xy} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right] dx dy \end{aligned}$$

• 疲劳、断裂与损伤 •

如不考虑体积力，则平衡微分方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

由此可将上式简化成

$$\oint_{r'} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \iint_{\Omega} \left(\sigma_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \tau_{xy} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) dx dy$$

或简记为

$$\begin{aligned}\oint_{r'} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds &= \iint_{\Omega} \sigma_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \sigma_y \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right] dx dy\end{aligned}\tag{2.125}$$

用和上面类似的方法，应用格林公式并考虑到在小变形条件下的几何关系

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

则可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_y} \cdot \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_y} \left[\int \sigma_y d\varepsilon_y \right] \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_y \\ &= \sigma_y \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right]\end{aligned}$$

这样，有

$$\begin{aligned}\oint_{r'} w dy &= \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \\ &= \iint_{r'} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx dy\end{aligned}\quad (2.126)$$

将式 (2.126) 与式 (2.125) 两边相减，则得

$$\oint_{r'} w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = 0$$

因为 $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ 及式 (2.123)，则上式可化为

$$\int_{\Gamma_1} w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \int_{\Gamma_3^*} w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds$$

其中积分回路 Γ_3^* 与图 (2.29) 中的 Γ_3 反方向，也就是同 Γ_1 一样为逆时针。因为 Γ_1 和 Γ_3^* 是任意的，所以这就证明了 J 积分与路径的无关性，即 J 积分具有守恒性，这是小变形全量理论所得到的结果。

2.7.3 线弹性条件下 J 积分与 K_I 的关系及应变能释放率概念

我们研究 J 积分的目的就是要使 J 积分成为断裂判据的有效参量，以 J 积分为描述裂纹尖端区域的应力应变场强度的单一参量。只有这样，当裂纹尖端地区的应力应变场达到使裂纹开始扩展的临界强度时， J 积分也达到其相应的临界值，而与试件的尺寸和加载方式无关。

• 疲劳、断裂与损伤 •

根据 J 积分的守恒性，积分路径可以任意选择，若取积分回路线 J 为半径为 R 的圆周，如图 2.30 所示，将 J 积分定义式 (2.121) 变为极坐标形式，其坐标变换关系式为

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta$$

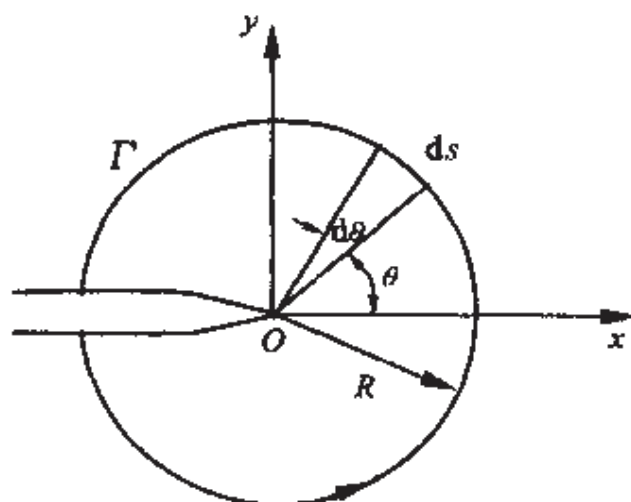


图 2.30

即有 $dy = R \cos \theta d\theta$, $ds = R d\theta$, 代入式 (2.121) 并整理得

$$J = R \int_{\Gamma} \left[w(R, \theta) \cos \theta - T_x(R, \theta) \frac{\partial u_x(R, \theta)}{\partial x} \right] d\theta \quad (2.127)$$

在线弹性范围，应变能密度为

$$w = \int \sigma_y d\varepsilon_y = \frac{1}{2} \varepsilon_y \sigma_y$$

将广义虎克定律代入上式，则得

$$w = \frac{1+\mu}{2E} \left[(1-\mu)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2\tau_{xy}^2 \right] \quad (2.128)$$

再将线弹性断裂力学中 I 型裂纹尖端应力分量的极坐标公式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.129)$$

代入上面的式 (2.128) 中则得

$$w = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{K_I^2}{2\pi R} \left(1 - 2\mu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.130)$$

将边界条件式 (2.124) 变换成三角函数形式:

$$T_x = \sigma_x l + \tau_{xy} n = \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta$$

$$T_y = \tau_{xy} l + \sigma_y n = \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta$$

将式 (2.129) 代入上式, 得

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{3}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \right) \\ T_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{3}{2} \sin \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.131)$$

又知在线弹性断裂力学中 I 型裂纹尖端附近位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u_1 = u &= \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ u_2 = v &= \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\chi + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.132)$$

其中 G 为剪切弹性模量; 常量 χ 为

$$\chi = \begin{cases} \frac{3-\mu}{1+\mu} & \text{平面应力} \\ 3-4\mu & \text{平面应变} \end{cases}$$

对于平面应变情况，将 $\chi = 3 - 4\mu$ 代入式 (2.132)，并经三角函数运算，整理得

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \left(1 - 2\mu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \\ v &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \left(2 - 2\mu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.133)$$

将式 (2.130)、(2.131) 和 (2.133) 代入式 (2.127)，并注意微分运算中的极坐标变换，经计算简化得

$$J = \frac{1-\mu^2}{E} K_I^2 \quad (2.134)$$

此式是平面应变条件下的结果，同理，平面应力条件下，可得

$$J = \frac{K_I^2}{E} \quad (2.135)$$

因为 J 积分与积分路径无关，所以上述以圆周路径积分的结果具有一般性，即为一确定的常数，它与材料有关，与应力强度因子也有确定的关系，因此 J 积分反映了裂纹尖端应力应变场的强弱。

1921 年格里菲斯 (A. A. Griffith) 采用能量平衡原理，建立了以应变能释放率 G 为参量的裂纹失稳扩展准则，对玻璃、陶瓷等脆性材料出现的低应力脆断现象作了合理的解释。

应变能释放率 G 是指含裂纹物体的总势能随裂纹扩展的变化率，又称为裂纹扩展力，其表达式为

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{U(a) - U(a + \Delta a)}{\Delta a} = -\frac{\partial U}{\partial a} \quad (2.136)$$

式中 a 为裂纹长度； U 为物体每单位厚度的总势能。

应变能释放率 G 与上述应力强度因子 K_I 一样，也是线弹性断裂力学中的一个重要参量，并且与 I 型裂纹的应力强度因子 K_I 之间存在下面的关系：

$$G_I = \begin{cases} \frac{K_I^2}{E} & \text{平面应力} \\ \frac{1-\mu^2}{E} K_I^2 & \text{平面应变} \end{cases} \quad (2.137)$$

由式 (2.134)、(2.135) 和 (2.137) 可得

$$J_I = G_I \quad (2.138)$$

即在线弹性条件下， J 积分就是应变能释放率 G_I 。这也表明至少在线弹性阶段 J 积分有明确的物理意义。

2.7.4 J 积分的断裂判据

如前面所述，弹塑性体受力后裂纹尖端塑性区内的应力应变场的本构关系至今仍是难点，为了避开求解裂纹前缘塑性区应力应变场时数学上的困难，便提出了 J 积分概念及计算方法。

在弹塑性情况下，1968 年 Hutchinson、Rice 和 Rosengren 分别独立从 J 积分与积分路径无关出发，在塑性全量理论（即 Hencky 的形变理论）条件下，证明了 J 积分与上述在线弹性范围的 J 积分一样，唯一决定着裂纹尖端弹塑性应力应变场

的强度，也具有奇异性，并得到一系列实验证实。尤其是 J 积分的临界值被测定之后，证实了此临界值与试件类型和尺寸无关，是材料的一种特性参量，使 J 积分得到公认，并成为弹塑性材料断裂的判据。

根据上述分析， J 积分可以作为弹塑性条件下裂纹尖端应力应变场的参量。而当这个参量 J 积分增大到材料的某个临界值 J_{Ic} 时，裂纹即要开裂扩展，即 J 积分可作为弹塑性断裂判据

$$J_I = J_{Ic} \quad (2.139)$$

式中的 J_{Ic} 是材料抵抗裂纹扩展的断裂韧性，称为临界 J 积分，可以通过测试获得，其测试方法可参考其他书籍；左边的 J 积分则是与试件几何形状、受力形式及裂纹尺寸有关的，需要通过计算得到的。

可以看出， J 积分存在一些明显的优点：

(1) J 积分判据与其他判据（如 K 判据、 δ 判据）存在着内在联系和一致性；

(2) J 积分计算简单，也较准确，且不需要对裂纹尖端附近进行仔细分析，仅要求确定远离尖端的弹塑性总的特性（能量），从而绕开难以分析计算的复杂裂纹尖端区域，实际工作也只是测定载荷-位移（ $P-\Delta$ ）曲线，而不像 COD 方法必须通过几何关系换算而带来误差；

(3) 利用 $J_{Ic} = K_{Ic}^2/E$ ，可以用小试样测得的 J_{Ic} 换算成 K_{Ic} ，而不像线弹性中测 K 时要用大试件；

(4) J 积分的理论基础比 COD 判据的理论基础要严密得多。

J 积分也有它的局限性和存在的问题，主要的有：

(1) J 积分是二维的，故目前只适用于平面问题，而不适用于空间问题，也有人将它推广到空间问题，但还不成熟；

(2) 由于 J 积分是建立在塑性变形为前提的全量理论上的，从而才能证明其守恒性和 $J = -\frac{\partial U}{\partial a}$ ，而这只有单调加载

的条件才能满足。这样，就把所有不同于单调加载的加载方式都排除在外了。因此， J 积分只能说明裂纹扩展的开始，而不能说明断裂的全过程；

(3) 要满足小变形条件，这就要求塑性区外的广大弹塑性区仍属于小变形范畴；

(4) J 积分的物理含义还不很明确，有人认为它表征裂纹尖端应力应变场的强度；有人认为它代表裂纹尖端的一种能量，都有一定的道理。这反映了人们对 J 积分的物理意义存在着不同的看法。

2.8 断裂力学在疲劳裂纹扩展中的应用简介

传统的疲劳寿命设计，主要是根据材料的 $S-N$ 曲线，运用线性累积损伤理论来估计构件的疲劳寿命，没有考虑到材料缺陷（如表面划痕、金属夹杂、腐蚀坑、锻造缺陷，等等）造成的各种类型的裂纹。带着这种裂纹的构件，在交变载荷下，即使载荷低于材料本身的疲劳强度极限，裂纹也会很快扩展而断裂，导致灾难性的破坏，因此，传统的疲劳寿命设计是不能充分保证构件的安全可靠的。

断裂力学应用于疲劳，则从构件本身存在的裂纹出发，

研究裂纹在交变载荷下的扩展特性，来确定其安全可靠性，这是对传统疲劳试验和分析方法的重要补充和发展。

2.8.1 疲劳裂纹

对于一个含有初始裂纹 a_0 的构件，在承受静载荷时，只要工作应力 σ 小于临界应力 σ_c ，则构件在静应力水平下工作就是安全可靠的，只有当 $\sigma = \sigma_c$ 或 $K_I = K_{Ic}$ 时，才会发生脆性破坏。

但如果构件承受的是一个 $\sigma < \sigma_c$ 的交变应力，那么这个初始裂纹 a_0 会在交变应力作用下发生缓慢扩展，当扩展到 $a = a_c$ 时，构件发生失稳破坏。从初始值 a_0 到临界值 a_c 这一段扩展过程，称为疲劳裂纹的亚临界扩展，也称为宏观裂纹 a_0 的剩余寿命阶段，如图 2.31 所示。

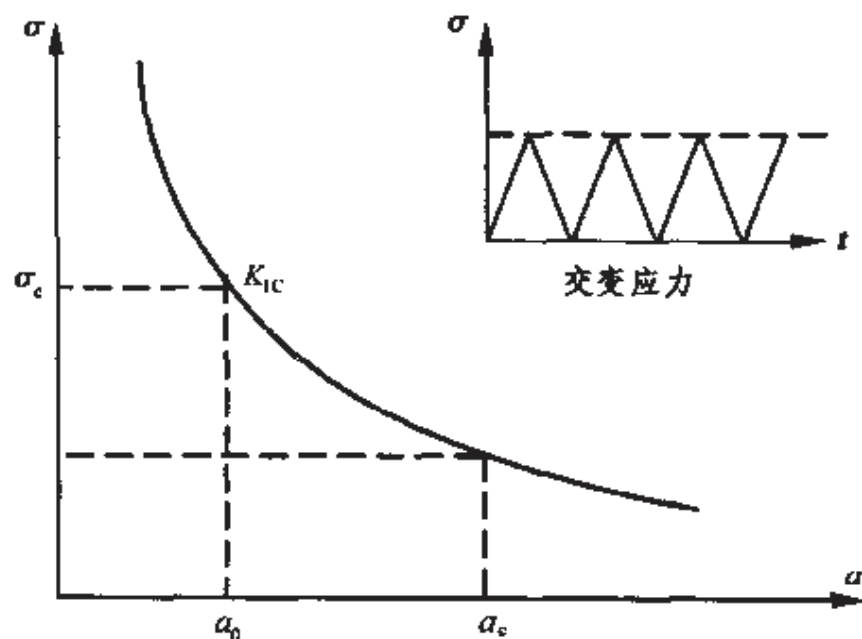


图 2.31

材料总的疲劳寿命 N 由两部分组成，即形成寿命 N_i

(initiation) 及裂纹扩展直至断裂的寿命 N_p (propagation):

$$N = N_i + N_p \quad (2.140)$$

疲劳断裂过程受许多因素的影响, 比较复杂, 但按裂纹发展过程大致可以分为四个阶段:

1. 裂纹成核阶段

在交变载荷作用下, 构件如果没有裂纹或是无缺陷的光滑的零部件, 虽然名义应力小于材料的屈服极限, 但因为材料不均匀, 在构件的表面局部区域仍然能产生滑移。用力学原理来解释, 由于构件表面是平面应力状态, 容易产生滑移, 但看不到塑性变形特征。由于多次反复的循环滑移过程, 便产生金属挤出和挤入的滑移带, 由此形成微裂纹的核。

2. 微裂纹扩展阶段

裂纹核形成后, 微裂纹沿与主应力轴成 45° 的滑移面扩展。此阶段扩展深入表面很浅, 大约十几微米, 而且是有许多沿滑移带的裂纹, 如图 2.32 所示。这个过程是裂纹扩展的第一阶段。

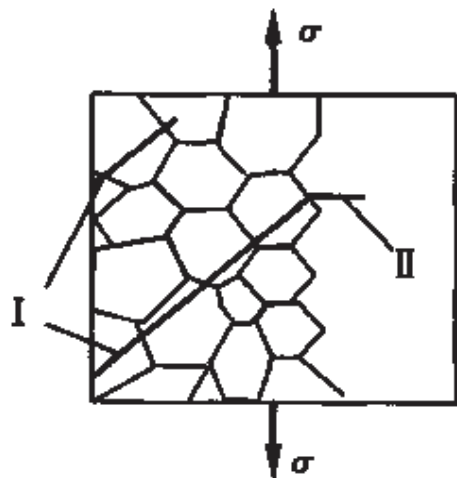


图 2.32

• 疲劳、断裂与损伤 •

3. 宏观裂纹扩展阶段

这一阶段是从微观裂纹逐渐过渡过来的宏观阶段，裂纹扩展速率增加，扩展方向与拉应力垂直，且是单一裂纹扩展。一般认为裂纹长度 a 在 $0.01 \text{ mm} \sim a_c$ 范围内的扩展为宏观裂纹扩展阶段，又称为裂纹扩展的第二阶段。

4. 最后断裂阶段

当裂纹扩展到足够大即达到临界尺寸 a_c 时，便会产生失稳扩展而很快断裂。

以上是无初始裂纹的光滑表面构件的典型疲劳断裂过程。对于高强度材料，因为屈服强度高，缺口敏感性大，以及内部夹杂和硬颗粒多，往往直接在宏观的应力集中处裂纹形成核，并且沿夹杂与基体界面首先裂开，由此开始宏观裂纹稳定扩展阶段，而没有倾斜的微观裂纹扩展阶段。用断裂力学的观点来分析疲劳，最重要的是宏观裂纹扩展阶段。

2.8.2 疲劳裂纹扩展速率

为了准确地描述亚临界扩展，人们把裂纹长度 a 对应力循环次数 N 的变化率 da/dN 定义为亚临界扩展速率。更通俗地说，亚临界扩展速率 da/dN 就是构件在交变载荷作用下每一次应力循环后裂纹的扩展量。影响它的因素很多，如应力强度因子幅度、平均应力（或循环特性）、加载频率、温度、腐蚀介质及热处理条件等。但实验证明：裂纹尖端的应力强度因子幅度 ΔK_I 是影响 da/dN 的主要因素。 ΔK_I 等于交变应力最大值 σ_{\max} 和最小值 σ_{\min} 所计算出来的应力强度因子值之差，即

$$\Delta K_I = K_{I_{\max}} - K_{I_{\min}} \quad (2.141)$$

对于裂纹扩展速率,近年来在国内外作了大量的研究工作,取得了不少成绩。在单轴循环交变应力下,垂直于应力方向的裂纹扩展速率,一般可写成以下形式:

$$\frac{da}{dN} = f(\sigma, a, c) \quad (2.142)$$

式中 N 为应力循环次数, σ 为正应力, a 为裂纹长度, c 为与材料有关的常数。

由于裂纹扩展速率 da/dN 是 σ 、 a 和 c 的函数, 研究者根据试验资料, 提出了各种不同的表达式。其中最著名的表达式为巴里斯 (P. C. Paris) 半经验定律, 即

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^n \quad (2.143)$$

式中 C 和 n 是与材料有关的两个常数, 可由实验确定。而 ΔK_I (应力强度因子的幅度) 定义为

$$\begin{aligned} \Delta K_I &= K_{I_{\max}} - K_{I_{\min}} \\ &= Y\sigma_{\max}\sqrt{\pi a} - Y\sigma_{\min}\sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (2.144)$$

因为在有压缩的情况下, K_I 无定义, 故当 σ_{\min} 为压缩应力时, $K_{I_{\min}}$ 应取为零。Paris 公式 (2.143) 表明: 疲劳裂纹扩展是由裂纹尖端弹性应力强度因子的变化幅度所控制的。

对式 (2.143) 两边取对数, 即

$$\lg \frac{da}{dN} = \lg C + n \lg(\Delta K_I) \quad (2.145)$$

若取双对数坐标，并以 da/dN 的对数 $\lg(da/dN)$ 为纵坐标， ΔK_I 的对数 $\lg(\Delta K_I)$ 为横坐标，则式 (2.145) 在该坐标系中就是一条直线，如图 2.33 所示。大量实验结果分析表明，在双对数坐标系中， $\lg(da/dN)$ 与 $\lg(\Delta K_I)$ 的关系不是单一的一条直线，而是由不同斜率的四条直线组成，如图 2.33 所示。

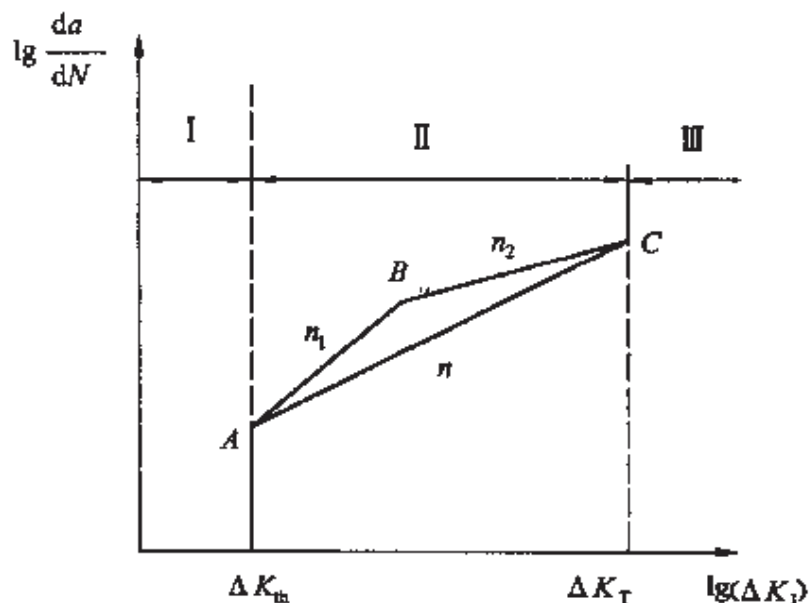


图 2.33

从图中可见，若 ΔK_I 小于 ΔK_0 所确定的界限值，裂纹就不会扩展而处于稳定状态，而 ΔK_0 称为裂纹扩展的“门槛值”。当 ΔK_I 达到 ΔK_0 时，裂纹扩展速率将急剧上升，直线几乎与纵线平行。此后，它们成指数 n_1 的关系，即图中斜直线 AB 。当 ΔK_I 继续增加，出现转折点 B ，过 B 点，直线斜率降低为 n_2 ，但降幅不大。随着 ΔK_I 的进一步增加，过转折点 C 后，斜率又将加大，以致裂纹出现失稳扩展。 C 实际上是裂纹扩展速率的加速转折点，其对应的横坐标以 ΔK_T 表示，称为“上门槛值”。因此，可将图中 $\lg(da/dN)$ 与 $\lg(\Delta K_I)$ 的关系划分为：

I 是裂纹不扩展区；II 是裂纹亚临界扩展区，前面的式 (2.143) 只适用该区；III 是裂纹失稳扩展区。

2.8.3 疲劳裂纹扩展寿命估算

下面将利用式 (2.143) 建立的 $\lg(da/dN)$ 与 $\lg(\Delta K_I)$ 的关系来估算构件的疲劳裂纹扩展寿命。

一般情况下，可以将应力强度因子的幅度表示为

$$\Delta K_I = Y\Delta\sigma\sqrt{\pi a}$$

将上式代入式 (2.143)，得

$$\frac{da}{dN} = C(Y\Delta\sigma)^n a^{\frac{n}{2}} \quad (2.146)$$

假设裂纹扩展过程中， Y 不变，裂纹从原始尺寸 a_0 扩展到临界尺寸 a_c 所需的疲劳寿命为 N ，将上式移项后，积分得

$$\int_{a_0}^{a_c} a^{-\frac{n}{2}} da = \int_0^N C(Y\Delta\sigma)^n dN$$

而有

$$\int_{a_0}^{a_c} a^{-\frac{n}{2}} da = \frac{a^{-\frac{n}{2}+1}}{-\frac{n}{2}+1} \Big|_{a_0}^{a_c} = \frac{2}{2-n} \left(a_c^{\frac{2-n}{2}} - a_0^{\frac{2-n}{2}} \right)$$

$$\int_0^N C(Y\Delta\sigma)^n dN = C(Y\Delta\sigma)^n N$$

所以，当 $n < 2$ 时，由上面各式可得

• 疲劳、断裂与损伤 •

$$N = \frac{2}{C(Y\Delta\sigma)^n (2-n)} \left(a_c^{\frac{2-n}{2}} - a_0^{\frac{2-n}{2}} \right) \quad (2.147)$$

当 $n=2$ 时

$$N = \frac{1}{C(Y\Delta\sigma)^n} \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{a} = \frac{1}{C(Y\Delta\sigma)^n} \ln \frac{a_c}{a_0} \quad (2.148)$$

当 $n>2$ 时

$$N = \frac{2}{C(Y\Delta\sigma)^n (n-2)} \left(\frac{1}{a_0^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{1}{a_c^{\frac{n-2}{2}}} \right) \quad (2.149)$$

如已知原始裂纹尺寸 a_0 , 则经过 N 次循环后的裂纹尺寸为

$$a_c = \frac{1}{\left[\frac{1}{a_0^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{(n-2)N \cdot C(Y\Delta\sigma)^n}{2} \right]^{\frac{2}{2-n}}} \quad (2.150)$$

一般地讲, 利用上述公式即可对裂纹扩展寿命做出初步计算。但是必须指出, 对于具体构件的计算, 尚需考虑一些实际问题。

2.8.4 应变疲劳

以上所述疲劳裂纹扩展规律都是在恒应力幅度下试验的, 只适用于低应力、高循环(长寿命)的低扩展速率情况。对于高应力、低循环(频率 $f < 10$ 周/分)疲劳或称塑性疲劳、应变疲劳, 其特点是应变幅值很高, 最大应变接近屈服应变,

故扩展速率高 ($da/dN > 10^{-2}$ mm/周)、寿命短 ($N < 10^4$ 周)。在考虑问题时应该用应变幅度 $\Delta\varepsilon$ 代替应力幅度 $\Delta\sigma$ 来作为控制参量。在常规疲劳分析中, 对于应变疲劳是以 Coffin-Manson 关系来计算疲劳寿命, 即

$$\Delta\varepsilon_p N^b = C \quad (2.151)$$

式中 $\Delta\varepsilon_p$ 是塑性应变幅度; N 是断裂时的循环次数; b 、 C 是材料常数。

一般认为, 应变疲劳时产生 $a_0 = 10^{-2}$ mm 裂纹的循环周次只占总寿命的 10%, 故光滑试样的应变疲劳寿命主要是由裂纹扩展来控制。因为应变疲劳时最大应变已接近屈服应变, 故裂纹尖端区的塑性区很大, 这时就必须用弹塑性断裂力学来分析应变疲劳的裂纹扩展速率, 也就是利用裂纹尖端张开位移幅度 $\Delta\delta$ 或 J 积分幅度 ΔJ 作为控制裂纹扩展速率的主要参量, 即

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta\delta)^n \quad (2.152)$$

或

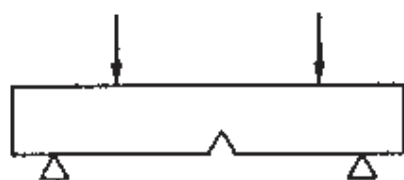
$$\frac{da}{dN} = B(\Delta J)^m \quad (2.153)$$

式中 A 、 n 和 B 、 m 在一定条件下是材料常数。

思考题与习题

1. 判断图示几种受力情况下裂纹扩展的类型。

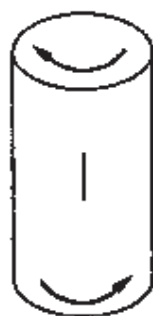
• 疲劳、断裂与损伤 •



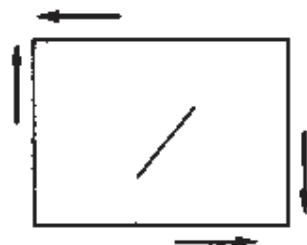
(a)



(b)



(c)



(d)

2. 什么是应力强度因子 K_I ? 什么是材料的断裂韧性(度) K_{IC} ? 对比单向拉伸条件下的应力及断裂强度极限, 说明 K_I 与 K_{IC} 的区别和联系?

3. 什么是 Airy 应力函数? 什么是 Westergaard 应力函数? 写出 Westergaard 应力函数的形式, 并证明其满足双调和方程。

4. 若已知复变函数 Z 满足平面问题的边界条件, 怎样用该函数表示 Westergaard 应力函数, 以及用该函数表示问题的应力、应变和位移解?

5. 试述 I 型裂纹双向拉伸问题中的边界条件, 如何根据该边界条件确定一复变函数, 并由此构成应力函数, 最后写出问题的解。

6. 在什么条件下应力场强度因子 K_I 的计算可以用迭加原理?

7. 试说明为什么裂纹尖端的塑性区尺寸在平面应变状态比在平面应力状态要小。

8. 什么现象是应力松弛？试说明它对裂纹尖端塑性区尺寸有何影响。

9. 小范围屈服是指什么情况？在此条件下线弹性断裂力学的公式是否适用？如何应用？

10. 什么是“有效裂纹长度”的概念？

11. 某一大型板件，材料的 $\sigma_{0.2} = 1\ 200\ \text{MPa}$ ， $K_{Ic} = 115\ \text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ ，探伤发现有一长 20 mm 的横向穿透裂纹，若在平均为 900 MPa 的纵向拉应力作用下，试计算 K_I 及塑性区宽度 R_0 ，并求出该工件使用的安全系数。

12. 什么是 $P-V$ 曲线？由于材料的性能及试样的尺寸不同， $P-V$ 曲线一般有哪几种类型？

13. 试说明在测试材料的平面应变断裂韧性 K_{Ic} 时，为什么要对计算的 K_0 进行有效性判断？

14. 试述 COD 的意义？COD 原理的基本思想是什么？

15. 为什么说 D-M 模型是一种具有弹塑性概念而又是线弹性化的模型？由该模型导出的 COD 表达式是否可以用于全面屈服的情况？为什么？

16. 用 D-M 模型计算裂尖张开位移，若 $\sigma/\sigma_s = 0.5$ ，并与 σ/σ_s 比 1 小很多的近似公式比较，其误差为多少？

17. 简述 J 积分的意义，表达式和性质。 J_I 、 G_I 及 J_{Ic} 、 G_{Ic} 有何区别？

18. J 积分的守恒性成立要满足什么条件？

19. 说明 J 积分的物理意义。

20. 疲劳断裂过程按其发展大致可以分为哪几个阶段？

21. 什么是应力疲劳，什么是应变疲劳？各有什么特点？

22. 什么是疲劳裂纹扩展门槛值，该值在工程上有何意义？

23. 影响疲劳裂纹扩展门槛值的主要因素有哪些？

第 3 章

损伤力学

3.1 概 述

结构的破坏控制一直是在工程设计中的关键所在。结构的破坏不会突然发生，而是损伤积累的结果。这里所说的损伤可能是制造加工过程中产生的微裂纹，它们在外载的作用下会不断地长大、汇合形成宏观裂纹。宏观裂纹不断扩展，导致结构的强度持续降低，最终失去承载能力，结构完全破坏。破坏控制的目的就是要使结构在使用中不会发生这种灾难性的完全破坏，为了确定裂纹扩展的容许尺度，就必须知道结构强度随裂纹扩展的变化规律；而为了确定结构的安全服役期，又必须知道裂纹的扩展规律。为此，必须预先确认裂纹的萌生位置，有了这个前提，才能深入分析裂纹的扩展规律及其对结构强度的影响。

实际上，微裂纹形式的损伤在材料的制造、加工过程中已经存在，这些微裂纹的聚合与长大造成了宏观裂纹的形成与扩展。由于断裂力学只能分析宏观裂纹的扩展行为，

不能预估宏观裂纹的萌生位置，而基于断裂力学的破坏分析常常包含着对裂纹萌生位置的人为假定，因此所得结论带有经验性。

此外，在断裂力学中，裂纹被理想化为具有光滑表面的几何间断面，因而裂纹尖端的应力应变场具有奇异性，其奇异阶数与材料的本构关系相关。断裂力学还假定裂纹尖端区域的材料性能与远离裂纹区是一样的。如前所述，宏观裂纹是由微裂纹聚合、长大形成的，其扩展总是伴随着微裂纹损伤。因而，在裂纹尖端区域微裂纹对材料机械性能的影响是不应该忽略的，这就需要更精确的破坏分析模型，损伤力学正是在这一工程背景中产生与发展的。损伤力学是连续体力学的一个重要分支，它系统地讨论微观缺陷对材料的机械性能、结构的应力分布的影响以及缺陷的演化规律，可用于分析结构破坏的整个过程，即微裂纹的演化、宏观裂纹的形成直至构件的完全破坏。

损伤力学有两个主要分支：

(1) 连续损伤力学：它是利用连续介质热力学与连续介质力学的唯象学方法，研究损伤的力学过程，它着重考察损伤对材料宏观力学性质的影响及损伤演变的过程和规律，而不细察其损伤演变的细观物理与力学过程，只求用连续损伤力学预测的宏观力学行为，符合实验结果与实际演况。

(2) 细观损伤力学：它通过对典型损伤基元（如微裂纹、孔洞、夹杂等）以及各种基元的组合，研究其变形与演变过程，通过统计方法，求得宏观变形与损伤过程与细观损伤参量之间的关联。

近年来发展的基于细观的唯象损伤理论，则是介于上述二者之间的一种损伤力学理论，这些理论主要限定在确定性

现象的范围。本篇主要介绍连续损伤力学（又称唯象损伤力学）的基本概念和基本方法。

3.2 损伤的力学表示

3.2.1 一维损伤变量

在外载和环境的作用下，由于细观结构的缺陷（如微裂纹、微空洞等）引起的材料或结构的劣化过程称为损伤。从本质上讲，这些微缺陷是离散的，但作为一种简单的近似，在连续损伤力学中，所有的微缺陷被连续化，它们对材料的影响用一个或几个连续的内部场变量来表示，这种变量称为损伤变量。

1958年，Kachanov 提出用连续度的概念来描述材料的逐渐衰变。从而，材料中复杂的、离散的衰变耗散过程可以用一个简单的连续变量来模拟，这就奠定了损伤力学的基础。

考虑一受均匀拉力的直杆，如图 3.1 所示，认为材料劣化的主要机制是因为微缺陷导致的有效承载面积的减小。设其无损伤状态时的横截面面积为 A ，而损伤后的有效承载面积减小为 \tilde{A} ，则连续度 ψ 定义为有效承载面积与无损伤状态的模微而而积之比，即

$$\psi = \frac{\tilde{A}}{A} \quad (3.1)$$

显然，连续度 ψ 是一个无量纲的标量场变量， $\psi = 1$ 是表示完

全没有缺陷的理想材料状态, $\psi = 0$ 是表示完全破坏的没有任何承载能力的材料状态。

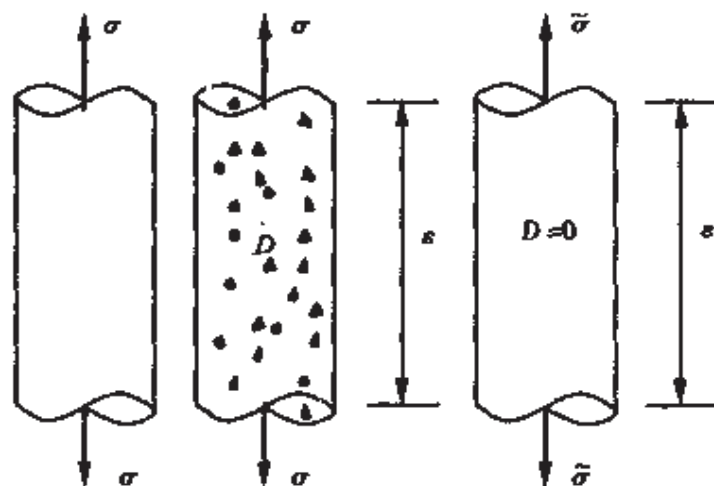


图 3.1

1963年,著名的力学家 Rabotnov 同样在研究金属的蠕变本构关系时建议用损伤因子(或称为损伤变量)

$$D = 1 - \psi \quad (3.2)$$

描述损伤。对于完全无损伤状态, $D = 0$; 对于完全丧失承载能力的状态, $D = 1$ 。由式(3.1)和式(3.2), 可得

$$D = \frac{A - \tilde{A}}{A} \quad (3.3)$$

即为各向同性材料的损伤变量。另外,也可以将损伤变量定义为

$$\phi = \frac{1}{\psi} = \frac{1}{1 - D} \quad (3.4)$$

的形式。此外, Broberg 建议将损伤变量定义为

$$D_B = \ln \frac{A}{\tilde{A}} \quad (3.5)$$

当 \tilde{A} 与 A 比较接近时，由该式得到的损伤变量与式 (3.3) 近似相等。Broberg 定义的优点是在加载过程中的损伤可以叠加。例如，假设面积是分两步减缩的，如有效承载面积从 A 减缩到 \tilde{A}_1 ，然后再减缩到 \tilde{A}_2 ，在这两步中的损伤分别为

$$D_{B1} = \ln \frac{A}{\tilde{A}_1}, \quad D_{B2} = \ln \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2} \quad (3.6)$$

于是，总的损伤为

$$D_B = \ln \frac{A}{\tilde{A}_2} = D_{B1} + D_{B2} \quad (3.7)$$

事实上，微缺陷的取向、分布及演化与受载方向密切相关，因此材料损伤实质上是各向异性的。损伤的各向异性早已得到实验验证。如蠕变裂纹扩展、延性断裂实验都表明损伤的各向异性对裂纹扩展型式、断裂时间、断裂载荷等有显著的影响。为了描述损伤的各向异性，通常采用 2 阶或 4 阶张量 D 来定义损伤。损伤值不一定总是增加的，实际上，损伤演化存在着某种阈值，如果超过该阈值，损伤才会发展。

3.2.2 有效应力的概念

无损伤状态下受外载荷 P 作用的直杆，通常的轴向应力为

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (3.8)$$

该应力为通常所谓的 Cauchy 应力。

如果所有的缺陷都张开，以至于微裂纹或微孔洞的表面上没有微力作用，则引入有效应力 $\tilde{\sigma}$ ，它与有效承载面积 \tilde{A} 有关，即

$$\tilde{\sigma} = \frac{P}{\tilde{A}} = \frac{\sigma}{\psi} \quad (3.9)$$

如用损伤变量 D 表示有效应力，则有

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (3.10)$$

或

$$\tilde{\sigma} = \sigma \phi \quad (3.11)$$

若用 Broberg 定义式 (3.5)，则有

$$\tilde{\sigma} = \sigma \exp D_b \quad (3.12)$$

对于不可压缩材料，直杆的拉伸对数应变为

$$\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} = \ln \frac{A_0}{A} \quad (3.13)$$

式中 A_0 和 L_0 为加载前的横截面面积和长度， A 和 L 为变形后的横截面面积和长度。于是名义应力为

$$\sigma_0 = \sigma \exp(-\varepsilon) \quad (3.14)$$

由式 (3.12) 和式 (3.14)，得

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 \exp(\varepsilon + D_b) \quad (3.15)$$

这些定义都是材料受拉伸时的有效应力。压缩时，如果一些

• 疲劳、断裂与损伤 •

缺陷闭合，损伤保持不变，则实际有效承载面积大于 \tilde{A} 。特别地，如果所有的缺陷全部闭合，压缩时的有效应力等于通常的应力 σ 。

3.2.3 应变等效原理

为了避免对每种缺陷和每类损伤机理都进行微观力学分析，1971年 Lemaitre 提出了一个建立在细观尺度上的应变等效原理，即损伤材料 ($D \neq 0$) 在有效应力作用下产生的应变与同种材料无损伤 ($D=0$) 时发生的应变等效，即损伤材料的任何应变本构关系都可以从无损伤材料的本构关系导出，只是其中的 Cauchy 应力 σ 须用有效应力 $\tilde{\sigma}$ 替代：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{无损伤材料} & | & \text{损伤材料} \\
 D=0 & | & 0 < D < 1 \\
 \varepsilon = F(\sigma, \dots) & | & \varepsilon = F\left(\frac{\sigma}{1-D}, \dots\right) \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{相同的推导}} & & \uparrow
 \end{array}$$

上述原理只在某些特殊损伤情况下，通过材料均匀处理才能得以证明，它将应用于弹性或塑性。

3.2.4 应变与损伤的耦合、断裂判损和损伤门槛值

按照前面几节所述，可以写出一维弹性定律和塑性定律。

3.2.4.1 弹性定律

通过有效应力概念及应变等价原理，可以写出的直接状态耦合：

$$\begin{array}{c|c} \text{无损伤材料} & \text{损伤材料} \\ D=0 & 0 < D < 1 \\ \varepsilon_c = \frac{\sigma}{E} & \varepsilon_c = \frac{\sigma}{E(1-D)} \end{array}$$

对于各向同性损伤材料，横向弹性应变为： $\varepsilon_{22}^e = \varepsilon_{33}^e = -\mu\varepsilon_c$ 。式中 E 为无损伤材料的弹性模量； μ 为泊松比。

用 $\tilde{E} = \sigma/\varepsilon_c$ 所定义的损伤材料的弹性模量为

$$\tilde{E} = E(1-D) \quad (3.16)$$

3.2.4.2 塑性定律

关于塑性应变演变的动力耦合，必须以塑性准则写出，用以导出动力本构方程。

为了使塑性模型化，通常考虑两种应变硬化：

- (1) 与位错密度或流动受阻有关的各向同性硬化；
- (2) 与内部微应力集中状态有关的运动硬化。相应的背应力定义了拉压(或三维)状态下弹性域的中心。

设 σ_s 为屈服应力， R 为由各向同性硬化引起的应力， X 为背应力， R 和 X 均为塑性应变的函数。定义屈服极限当前门槛值的一维塑性判据为（见图 3.2）

$$\sigma = \sigma_s + R + X \quad (3.17)$$

或
$$f = |\sigma - X| - R - \sigma_s = 0 \quad (3.18)$$

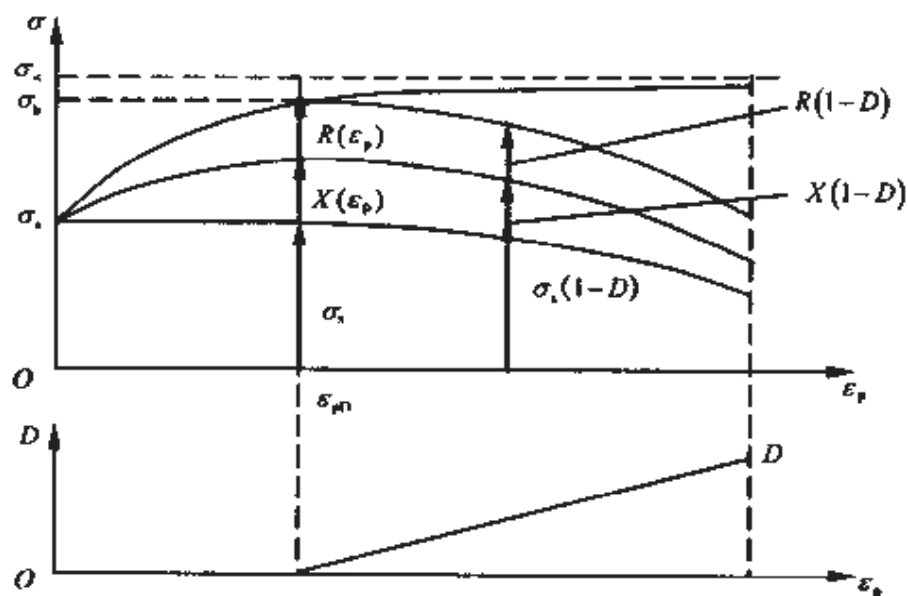


图 3.2

式中 f 为屈服函数，塑性应变动力本构方程由此导出。

$$\text{若} \begin{cases} f=0 \\ \text{和} \\ \dot{f}=0 \end{cases} \text{则} \dot{\epsilon}_p \neq 0 \quad \text{若} \begin{cases} f < 0 \\ \text{或} \\ \dot{f} < 0 \end{cases} \text{则} \dot{\epsilon}_p = 0$$

为了得到这一结果，可将总应变写为

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

发生损伤时，根据等价原理，屈服函数 f 必须写成

$$f = \left| \frac{\sigma}{1-D} - X \right| - R - \sigma_s = 0 \quad (3.19)$$

实验结果及方程

$$\sigma = (\sigma_s + R + X)(1-D) \quad (3.20)$$

此式表明，损伤等同地减少了屈服应力、各向同性应变硬化应力以及背应力，如图 3.2 所示。 ε_{p0} 为损伤开始时的塑性应变。

3.2.4.3 断裂判据

细观尺度的断裂就是裂纹萌生，它占据了体元的全部表面，即 $D=1$ 。在大多情况下它是由于不稳定过程在剩余有效承载面上突然引起原子分离产生的，它对应于损伤的临界值 D_c ，取决于材料和载荷条件。

原子的最终分离用作用于有效承载面上的有效应力的临界值表征，我们称之为 σ_w ，因为这是能够作用于材料的最大应力。

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D_c} = \sigma_w \quad (3.21)$$

式中 D_c 为损伤变量的临界值。

实际上， σ_w 可以用极限应力 σ_b 近似，因为 σ_b 较容易识别，但总是较小。于是

$$D_c = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_b} \quad (3.22)$$

给出一维应力 σ 下细观裂纹萌生的损伤临界，而极限应力被视为材料的特征值。 D_c 在 $D_c = 0$ （纯脆性断裂）和 $D_c = 1$ （纯延性断裂）之间变化，而通常为 0.2 到 0.5 的量级。

3.2.4.4 损伤门槛值

微裂纹萌生之前，引起损伤 D ，微裂纹的产生是由于微

• 疲劳、断裂与损伤 •

应力累积伴随着微应变的不协调或由于金属中位错的累积。这在简单拉伸情况下对应于一定的塑性应变值低于 ε_{p0} 值时，则不产生由于微裂纹导致的损伤：

$$\varepsilon_p < \varepsilon_{p0} \rightarrow D = 0 \quad (3.23)$$

最后，构成损伤力学基础的四个主要关系式为：

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E(1-D)} : \text{弹性} \\ \left| \frac{\sigma}{1-D} - X \right| - R - \sigma_s = 0 : \text{塑性屈服判据} \\ \varepsilon_p < \varepsilon_{p0} \rightarrow D = 0 : \text{损伤门槛值} \\ D = D_c \rightarrow \text{裂纹萌生} \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

3.3 损伤力学的基本方程

对于含损伤的连续介质，首先应该满足连续介质力学的基本方程；同时，损伤作为不可逆的耗散的热力学过程，又应该满足不可逆热力学的基本原理。因此，由连续介质力学和不可逆热力学可得到含损伤的连续体应该满足的基本方程，即损伤力学的基本方程。

3.3.1 质量守恒定律

取体积为 V 的物质体元，包围它的表面积为 ∂V 。由于体积内质量的减少应等于通过它的表面流失的质量，所以

$$\int_V \rho dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

式中 ρ 为密度， \mathbf{v} 为体元的流速， dV 为体元的体积， $d\mathbf{A}$ 为体元表面的面积。

利用奥斯特罗格拉得斯基公式，上式可写成

$$\int_V \dot{\rho} dV + \int_V \rho \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int_V (\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}) dV = 0$$

式中 $\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$ 为速度的散度，算子 $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ 。

因为体元的大小与位置都是任意的，所以物质内各处都应满足

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.25)$$

此式即为微分形式的连续性方程。

3.3.2 动量守恒方程

设作用在体元表面的应力为 σ ，体元内单位质量的体积力为 \mathbf{f} ，根据牛顿第二定律或动量守恒定律可得

$$\int_{\partial V} \sigma d\mathbf{A} + \int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} dV = \int_V (\nabla \sigma + \rho \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) dV = 0$$

上式对任何体元都成立，因此物质内处处有

$$\nabla \sigma + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (3.26)$$

此式即为微分形式的运动方程，也称为 Cauchy 动量方程。若体积力 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ，且物体是静止的（或作匀速运动）， $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ ，则由上式得

$$\nabla \sigma = 0 \quad (3.27)$$

这就是连续介质力学中的平衡方程。

3.3.3 能量守恒定律

能量守恒定律即热力学第一定律是自然界普遍公认的物理定律，在考虑机械能和热能存在的热力学过程中，该定律可以表达为

$$W + Q = K + E \quad (3.28)$$

式中， W 为单位时间内体元的机械能， Q 为单位时间输入的热能， K 为单位时间内体元的动能， E 为单位时间内体元的内能。

其中单位时间内体元的机械能（单位时间内外力所作的功）为

$$\left. \begin{aligned} W &= \int_{\nu} v \cdot \sigma dA + \int \rho f \cdot v dV \\ &= \int_{\nu} [\nabla \cdot (v\sigma) + \rho f \cdot v] dV \\ &= \int_{\nu} [(\nabla \sigma) \cdot v + \sigma : \nabla v + \rho f \cdot v] dV \\ &= \int_{\nu} [(\nabla \sigma) \cdot v + \sigma : \dot{\epsilon} + \rho f \cdot v] dV \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

其中 ϵ 表示应变张量， $\dot{\epsilon}$ 表示应变率张量。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3$$

单位时间输入的热能为

$$Q = - \int_{\nu} q \cdot dA = - \int \nabla \cdot q dV \quad (3.30)$$

式中 \mathbf{q} 表示热流密度（或称热通量）。

单位时间内体元的动能和内能分别为

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} dV \quad (3.31)$$

$$E = \int_V \rho e dV \quad (3.32)$$

式中 e 为内能的质量密度。将上述的 W 、 Q 、 K 、 E 的表达式代入能量守恒方程 (3.28)，得

$$\int_V (\rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \rho \dot{e} - (\nabla \sigma) \cdot \mathbf{v} - \sigma : \dot{\epsilon} - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q}) dV = 0$$

因为体元的大小与位置是任意的，因此在物质内处处有

$$\rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \rho \dot{e} - (\nabla \sigma) \cdot \mathbf{v} - \sigma : \dot{\epsilon} - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

利用上述的运动方程，则得

$$\rho \dot{e} - \sigma : \dot{\epsilon} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (3.33)$$

此式为无热源的守恒方程，即微分形式的热力学第一定律。其中 $\nabla \cdot \mathbf{q}$ 是单位体积体元向外输出的热量。体元之所以能生出热量起因于状态有所变化，包括外部状态变化和内部状态变化。

3.3.4 力学函数和内部状态变量

在热力学中讨论各种状态函数，最基本的热力学函数有三种：物态方程、内能和熵。这里首先讨论耗散过程的状态变量、内能以及由此表示的物态方程。

外部状态变化是指物质发生了粘性或塑性流动或变形，这种流动或变形要耗散能量，产生热量。外部状态变化过程

• 疲劳、断裂与损伤 •

中单位时间内所耗散的功是

$$\sigma_v : \dot{\epsilon} + \sigma_p : \dot{\epsilon}_p$$

其中 σ_v 表示非弹性应力张量, $\dot{\epsilon}_p$ 表示粘塑性应变张量, σ_p 表示引起粘塑性应变 $\dot{\epsilon}_p$ 的应力张量。

内部状态变化包括因各种原因引起的各种物理的或化学的变化。内部状态变量用 $\alpha_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 表示, 用 A_i 表示内部状态变量 α_i 变化了单位值所耗掉的能量, 又称之为和内变量 α_i 对偶的力 (广义力), 这种内变耗能率将可以被表示为 $A_i \dot{\alpha}_i$ 。

内部和外部状态变化所耗散的能量将全部转变为热, 这种热量除流失 $\nabla \cdot \mathbf{q}$ 外, 全部为体元所吸收, 引起熵值的增加。如用 s 表示单位物质所获得的熵, 则对于体积为 V 的体元有

$$\int \rho \dot{s} dV = \int \frac{1}{T} (\sigma_p : \dot{\epsilon}_p + \sigma_v : \dot{\epsilon} + A_i \dot{\alpha}_i - \nabla \cdot \mathbf{q}) dV$$

T 表示体元的温度。由此可得到

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \sigma_p : \dot{\epsilon}_p + \sigma_v : \dot{\epsilon} + A_i \dot{\alpha}_i - \rho T \dot{s} \quad (3.34)$$

将它代入能量守恒方程, 得

$$\rho \dot{e} - (\sigma - \sigma_v) : \dot{\epsilon} + \sigma_p : \dot{\epsilon}_p + A_i \dot{\alpha}_i - \rho T \dot{s} = 0 \quad (3.35)$$

这里分析的是一种缓慢的稳定的状态改变过程, 属于等温变化。为便于理解和分析, 可使用自由能密度函数 ϕ 表示物质的能量状态。自由能密度函数为

$$\phi = e - Ts \quad (3.36)$$

即得

$$\dot{\phi} = \dot{\epsilon} - T\dot{s} - \dot{T}s$$

所以由式 (3.36) 和式 (3.35) 可得

$$\rho\dot{\phi} = (\sigma - \sigma_v) : \dot{\epsilon} - \sigma_p : \dot{\epsilon}_p - A_i \dot{\alpha}_i - \rho\dot{T}s \quad (3.37)$$

自由能是弹性应变 ϵ_e 、温度 T 、内变量 α_i 的函数。考虑到总应变 ϵ 与 ϵ_e 及 ϵ_p 有关，自由能密度函数可写为

$$\phi = \phi'(\epsilon_e, T, \alpha_i) = \phi(\epsilon, \epsilon_p, T, \alpha_i) \quad (3.38)$$

即得

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_p} : \dot{\epsilon}_p + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \frac{\partial \phi}{\partial T} \dot{T}$$

显然，可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma - \sigma_v &= \rho \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \\ \sigma_p &= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_p} \\ s &= -\frac{\partial \phi}{\partial T} \\ A_i &= -\frac{\partial \phi}{\partial \alpha_i} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

上述方程就是各个状态变量与其对偶变量之间用自由能密度函数表述的物态方程。

3.3.5 热力学第二定律和 Clausiu-Duhem 不等式

对于损伤这种耗散型问题，除了要满足上述物态方程外，还需要满足热力学第二定律，即熵值不降低原理。

• 疲劳、断裂与损伤 •

平衡态熵 s 的定义为

$$ds = \frac{dQ}{T}$$

熵是对不可逆性数学分析而找出的一个态函数，可以由这一个态函数的数值来判断一个热力学过程进行的方向。

熵增加原理是指当物系由一个平衡态经绝热过程到达另一个平衡态，它的熵永不减少。如过程是可逆的，则熵的数值不变，如过程是不可逆的，则熵的数值是增加的。在假设没有内热源的情况下，熵增原理的数学表达式为

$$\dot{S} = \int_V \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot d\mathbf{A} + \int_V \rho \dot{s} dV = \int_V \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \rho \dot{s} \right) dV \geq 0 \quad (3.40)$$

由此得

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T^2} + \rho \dot{s} \geq 0$$

式中 $\text{grad } T = \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}$ 为温度梯度， T 为绝对温度。

若定义一个耗散势函数 ψ ，则

$$\dot{\psi} = T \dot{S}$$

即有

$$\dot{\psi} = \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T} + \rho T \dot{s} \geq 0 \quad (3.41)$$

将前面求得的 $\nabla \cdot \mathbf{q}$ 代入上式，得

$$\dot{\psi} = \sigma_p : \dot{\epsilon}_p + \sigma_v : \dot{s} + A_i \dot{\alpha}_i - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T} \geq 0$$

上式中所有两个相乘的量都是状态变量。一个具有力的性质，

称为广义力；另一个具有相当于应变率的性质，称为广义应变率。两者乘积之和构成了耗散率。如用 B_i 代表广义力， β_i 代表广义应变，则有

$$\dot{\psi} = B_i \dot{\beta}_i \geq 0$$

而在状态稳定变化阶段，上述方程对广义力 B_i 的任何微小变化也应成立，即

$$dB_i d\beta_i \geq 0 \quad (2.42)$$

在任何情况下，耗散的能量只会增多，不会减少。一旦上式不成立，状态的微小发展必将散发出能量。这一散发的能量又使状态进一步发展，如此不断循环，不稳定地发展下去，最终导致破坏。

类似于自由能密度函数 ϕ ，耗散势函数也可以表示成广义力 B_i 的函数。如用 B_i 作为坐标组成一个多维空间，空间中的任一点都代表物质的一种状态，称为状态点。状态点沿 $\psi = 0$ 变化，可以在空间定义一个超曲面： $\psi = 0$ 。该曲面是凸的，当状态点向曲面内部变化时，不再耗费能量；当状态点向曲面外部变化时，即使是微量 dB_i ，也将消耗能量。即 β_i 必有发展，设其微量为 $d\beta_i$ ，如以 β_i 为坐标另立一个多维空间，使它与 B_i 空间重合，则在空间中 β_i 变化 $d\beta_i$ 将垂直于 $\psi = 0$ 面。如不垂直，就有可能找到一种引起 $d\beta_i$ 的 B_i 使 $dB_i d\beta_i \geq 0$ 不成立。因此可知

$$\dot{\beta}_i = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial B_i} \quad (3.43)$$

它包括

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_v} \\ \dot{\epsilon}_p &= \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_p} \\ j &= -\lambda \frac{\partial \psi}{\partial g} \\ \alpha_i &= \lambda \frac{\partial \psi}{\partial A_i} \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

式中 $j = \frac{q}{T}$ 为熵流量， $g = \text{grad } T$ ， λ 可以根据关系式 $\dot{\psi} = 0$ 求得。

3.4 损伤与断裂

3.4.1 损伤力学与断裂力学的关系

断裂力学分析是假设结构内已存在一个或多个宏观裂纹，忽略裂纹扩展过程中材料性能的劣化及所导致的应力重分布，这种劣化在裂纹尖端区域尤其明显，故给结构强度与寿命预估带来较大的误差。

损伤力学是引入一个连续场变量 D 来描述材料性能的劣化，由微裂纹和微孔洞的生长与聚合产生的宏观裂纹可用损伤变量 D 的临界状态来描述。若建立起有效的分析模型，即可进行宏观裂纹尖端的损伤分析，当裂纹尖端单元的损伤值达到临界值，宏观裂纹就会扩展。断裂的整

个过程，即宏观裂纹的形成、起裂和扩展，都可用损伤力学分析。

3.4.1.1 基本假设

断裂力学是假设材料为线弹性、理想脆性的，当应力达到最大时发生断裂。损伤力学则认为材料是线弹性、具有损伤抗力的，当应力达到最大值时，材料仍具备残余强度。损伤变量 D 表征材料的劣化状态，当 $D=1$ ，材料发生完全破坏，丧失全部强度。

3.4.1.2 热力学方法

断裂力学多用表 3.1 所列变量：

表 3.1 断裂力学常变量

可测的变量	内部的变量	相伴变量
位移 u		载荷 P
	裂纹面积 A	应变能释放率 G

由下列状态方程可得到与 A 相伴的变量的表达式

$$G = -\frac{1}{2}u^2 \frac{\partial C}{\partial A}$$

其中 $C = P/u$ 为结构的整体刚度。在常载作用下，由裂纹面积增量 δA 导致的刚度变化为

$$\frac{\partial C}{\partial A} = -\frac{P}{u^2} \cdot \frac{\delta u}{\delta A}$$

因此，可得到应变能释放率的常见表达为

• 疲劳、断裂与损伤 •

$$G = \frac{1}{2} P \cdot \frac{\partial u}{\partial A}$$

对于脆性材料，裂纹扩展率取决于临界应变能释放率：

$$G < G_c: \text{裂纹不扩展 } (A=0)$$

$$G = G_c: \text{裂纹扩展 } (A>0)$$

损伤力学多选用表 3.2 所列变量：

表 3.2 损伤力学常用变量

状态变量		相伴变量
可测的	内部的	
应变 ε		应力 σ
绝对温度 T		熵 S
	弹性应变 ε_e	应力 σ
	塑性应变 ε_p	
	累积塑性应变 p	屈服面增量 R
	损伤变量 D	损伤应变能释放率 Y

由状态方程得

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} (1 - D)$$

$$Y = -\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

其中 C_{ijkl} 是弹性张量。

若应力为常量时的损伤增量为 dD ，则有

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} (1 - D) - C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dD = 0$$

故有

$$\left. \frac{d\varepsilon_y}{dD} \right|_{\sigma_y} = \frac{\varepsilon_y}{1-D}$$

弹性应变能的微分为

$$\left. \frac{dW_e}{dD} \right|_{\sigma_y} = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_y}{dD} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

所以得损伤应变能释放率为

$$Y = -\frac{1}{2} \cdot \left. \frac{dW_e}{dD} \right|_{\sigma_y}$$

3.4.2 损伤材料的 Dugdale 模型

3.4.2.1 基本假设

考虑中心裂纹板受 I 型载荷作用，如图 3.3 所示。假设裂纹长度与板的整体尺寸相比较小，板厚与裂纹长度相比也较小，变形与损伤都与时间无关。如同 Dugdale 模型一样，仍假设大变形和损伤局限于裂纹尖端的狭长区域，在这个狭长区内仅存在轴向应力分量。

3.4.2.2 定义

定义下列变量：

$$\text{损伤用 Broberg 定义 } D = \ln \frac{A}{A_0}$$

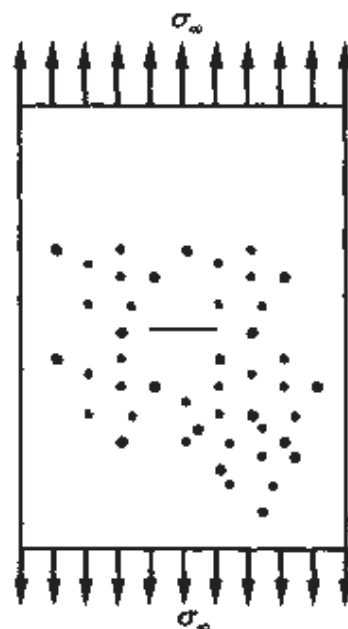


图 3.3

• 疲劳、断裂与损伤 •

Cauchy 应力 $\sigma = \frac{P}{A}$

有效应力 $\tilde{\sigma} = \frac{P}{\tilde{A}}$

式中 A 为宏观面积, \tilde{A} 为考虑微裂纹效应的有效面积。由上述定义可得

$$\sigma = \tilde{\sigma} \exp(-D) \quad (3.45)$$

3.4.2.3 形变律

考虑两种本构关系:

(1) 屈服模型 (见图 3.4)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\tilde{\sigma}}{E} && \text{当 } \tilde{\sigma} < \sigma_s \\ \varepsilon &= \text{不确定值} && \text{当 } \tilde{\sigma} = \sigma_s \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

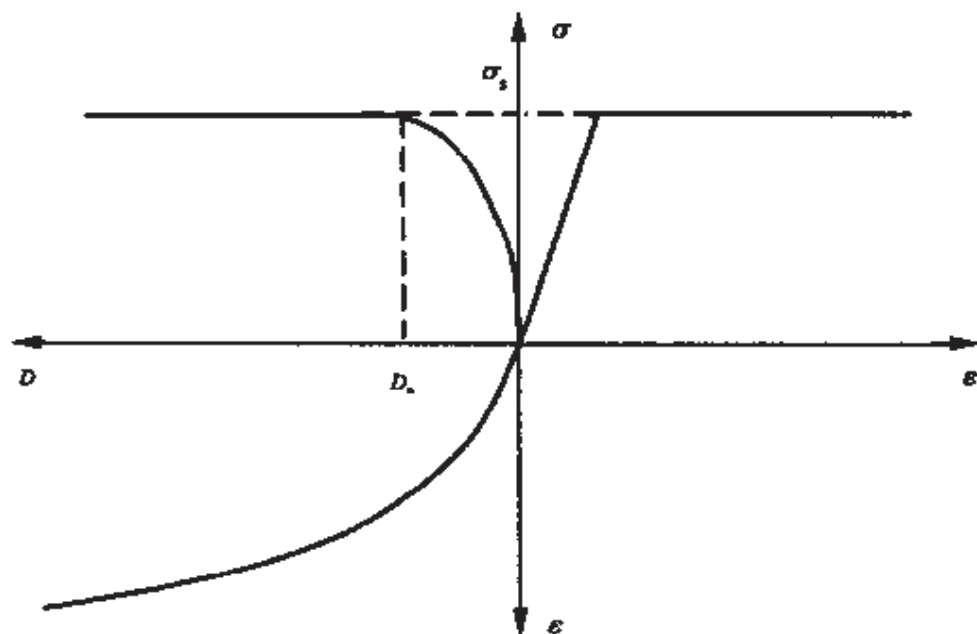


图 3.4

(2) 无屈服模型

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} \quad \text{对任意 } \tilde{\sigma} \quad (3.47)$$

这一模型不存在屈服应力。

3.4.2.4 损伤演变律

(1) 对于屈服模型，假设损伤与应变为幂函数关系（见图 3.4）：

$$D = K\varepsilon^m$$

式中 K 和 m 为材料常数，此式适用于所有的应变 ε 。

当 $\tilde{\sigma} < \sigma_s$ ，上式等价于

$$D = C_0 \tilde{\sigma}^m \quad \text{当 } \tilde{\sigma} < \sigma_s \quad (3.48)$$

式中

$$C_0 = \frac{K}{E^m}$$

(2) 对于无屈服模型，由于不存在屈服应力，损伤演变方程假设为

$$D = C_0 \tilde{\sigma}^m \quad \text{对任意 } \tilde{\sigma} \quad (3.49)$$

3.4.2.5 屈服模型

与 Dugdale 模型一样，设等效裂纹长度 c 等于实际裂纹长度 a 加上塑性区长度 b ，塑性区内受到单向分布压缩应力作用，如图 3.5 所示。在塑性区内， y 方向的有效应力 $\tilde{\sigma} = \sigma_s$ ；在塑性区外，最大有效应力小于 σ_s 。由式 (3.45)

得，塑性区内应力为

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-D) \quad (3.50)$$

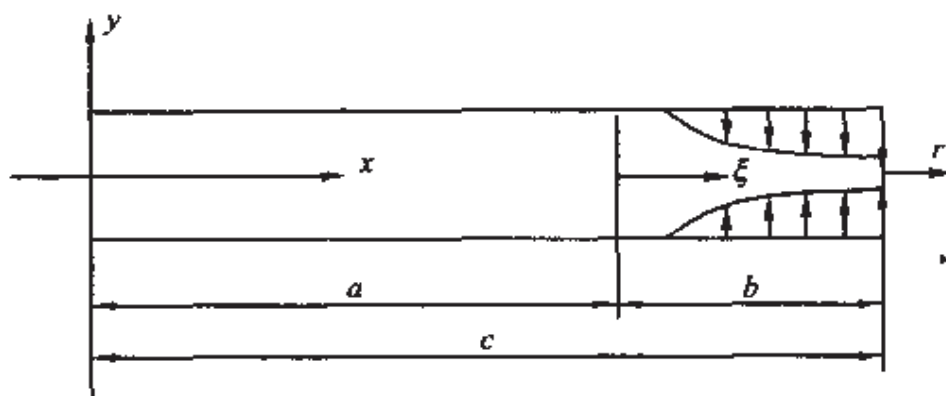


图 3.5

如图 3.5 所示，与不考虑损伤的 Dugdale 模型不同，塑性区内的应力不是常数。式 (3.50) 中只考虑了损伤引起的面积减小，而没有考虑应变导致的面积减小。若考虑应变效应，可用名义应力 σ_0 取代式 (3.50) 中的应力 σ ，所以有

$$\sigma_0 = \sigma \exp[-(D + \epsilon)]$$

根据 Hult 和 McClintock 的理论分析，在理想弹塑性材料中 III 型裂纹尖端的剪切应变具有 $\gamma \propto \xi^{-1}$ 的奇异性，Rooke 和 Bradshaw 的实验结果表明 I 型裂纹尖端也具有 ξ^{-1} 的奇异性，其中 ξ 是塑性区内一点到裂纹尖端的距离，如图 3.5 所示。这里虽然考虑损伤，仍假设在塑性区内应变具有 ξ^{-1} 的奇异性，相应地，损伤奇异性为 $D \propto \xi^{-n}$ 。由式 (3.48)，塑性区边界，损伤值为

$$D = D_0 \sigma_0^n$$

故在塑性区内损伤的分布表示为